ЛЕКЦИЯ 11

Пример 1. $H^1_{DR}(S^1) = \mathbb{R}$. Для доказательства сопоставим произвольной замкнутой 1-форме ν на окружности число $I(\nu) = \int_{S^1} \nu$. Функция I — линейный функционал на множестве замкнутых 1-форм; согласно утверждению ??, он равен нулю на множестве точных 1-форм. Покажем, что верно и обратное: если $I(\nu) = 0$, то форма ν точна (отсюда вытекает требуемое равенство).

Зафиксируем точку $p \in S^1$, и для всякой точки a обозначим γ_a дугу окружности, соединяющую против часовой стрелки точки p и a. Положим по определению $f(a) = \int_0^1 \gamma_a^* \nu$. Функция f гладкая: во всех точках, кроме p, это очевидно, а в точке p вытекает из условия $I(\nu) = 0$.

Вычисление в координатах (проделайте !) показывает, что $\nu = df$.

Теорема 1. *Пусть ν — замкнутая 1-форма на n-мерном многообразии M. Тогда в произвольной системе координат (U, x), в которой форма имеет вид $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i(x)\, dx_i$, выполнено тождество $\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i}(a)$ для всех $a \in U$ и всех $i, j = 1, \dots, n$. Обратно, если для любой точки a существует карта (U, x), $a \in U$, такая, что в ней выполнено это тождество, то форма замкнута.*

Доказательство. Пусть ν замкнута, т.е. в карте U выполнено равенство $\nu = df$. Тогда $\nu_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, откуда вытекает, что $\frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i}$.

Обратно, пусть тождество выполнено в некоторой карте (U, V, x). Без ограничения общности можно считать, что $V \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой открытый шар с центром в начале координат, и $x(a) = 0$. Поскольку открытый шар диффеоморфен $\mathbb{R}^n$, достаточно доказать утверждение в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$. По лемме Пуанкаре замкнутая форма на $\mathbb{R}^n$ точна, так что мы на самом деле построим функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что $\nu = df$.

Пусть $\gamma_b : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — прямолинейный отрезок, соединяющий начало координат с точкой $b = (b_1, \dots, b_n)$ — иными словами, $\gamma_b(t) = tb$. Положим по определению $f(b) = \int_0^1 \gamma_b^* \nu$, то есть $f(b) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \nu_i(tb) b_i\, dt$. Отсюда вытекает, что $\frac{\partial f}{\partial b_k}(b) = \int_0^1 \nu_k(tb)\, dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k}(tb) t b_i\, dt = \int_0^1 \nu_k(tb)\, dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \nu_k}{\partial x_i}(tb) t b_i\, dt =$ $\int_0^1 \nu_k(tb)\, dt \int_0^1 t \frac{d}{dt}(\nu_k(tb))\, dt = \int_0^1 \nu_k(tb)\, dt + t\nu_k(tb)|_0^1 - \int_0^1 \nu_k(tb)\, dt = \nu_k(b)$, то есть $\nu = df$. □

Следствие. *Всякая 1-форма на одномерном многообразии замкнута.*

Теорема 2. *1-форма ν на многообразии M замкнута тогда и только тогда, когда для любых двух векторных полей X и Y на нем выполнено равенство $X(\langle \nu, Y \rangle) - Y(\langle \nu, X \rangle) = \langle \nu, [X, Y] \rangle$.*

Здесь символом $\langle \nu, Z \rangle$ обозначена функция, значение которой в точке $a \in M$ равно значению линейного функционала $\nu(a) \in T_a^* M$ на векторе $Z(a) \in T_a M$; символом $Z(f)$ обозначен результат применения векторного поля Z (рассматриваемого как дифференциальный оператор) к функции f.

Доказательство. Очевидно, тождество в формулировке теоремы носит локальный характер, т.е. его выполнение в точке a зависит только от значений ν, X и Y в произвольной окрестности U точки a.

Пусть ν замкнута, т.е. $\nu = df$ в окрестности U. Тогда $X(\langle \nu, Y \rangle) - Y(\langle \nu, X \rangle) = X(\langle df, Y \rangle) - Y(\langle df, X \rangle) =$ $X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f) = \langle df, [X, Y] \rangle = \langle \nu, [X, Y] \rangle$.

Обратно, пусть тождество выполнено в окрестности U, в которой зафиксированы координаты $z_1, \dots, z_n$, в которых $\nu = \sum_{i=1}^n \nu_i(z)\, dz_i$. Положим $X = \frac{\partial}{\partial z_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial z_j}$, тогда $[X, Y] = 0$, и тождество означает, что $\frac{\partial \nu_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \nu_j}{\partial z_i}$. Согласно теореме 1, форма ν замкнута. □

Пусть ν — 1-форма на n-мерном многообразии M, и $U \subset M$ — открытое подмножество такое, что для всякой точки $a \in M$ ковектор $\nu(a) \in T_a^* M$ не равен нулю. Тогда $\Pi_a = \{v \in T_a M \mid \langle \nu(a), v \rangle = 0\}$ — подпространство в T_a^M размерности $n - 1$.

Предположим теперь, что существуют функции $f, g \in C^\infty(M)$ такие, что $\nu = g df$. Поскольку форма ν обращается в нуль, $df(p) \neq 0$ для всех $p \in U$. По теореме о неявной функции множество точек $N_p = \{a \in U \mid f(a) = f(p)\}$ является гладким подмногообразием U размерности $n - 1$; оно содержит точку p. Поскольку функция f постоянна на многообразии N, для всякого вектора $X \in T_a N_p \subset T_a M$ выполнено равенство $\langle df(a), X \rangle = X(f) = 0$ (здесь X рассматривается как функционал на $C^\infty(M)$ — см. лекцию 4). Тем самым $T_a N_p \subset \Pi_a$, а в силу равенства размерностей пространства совпадают.

Не всякий набор подпространств $\Pi_a \subset T_a M$ размерности $n - 1$ можно представить как семейство касательных пространств к подмногообразиям N_p той же размерности. Действительно, пусть это возможно.

Рассмотрим два векторных поля X, Y на M таких, что $X(a), Y(a) \in \Pi_a$ во всякой точке $a \in M$. Тогда каждая интегральная траектория этих полей целиком лежит в одном из подмногообразий N_p. Согласно теореме 2 лекции 6, тем же свойством обладают и интегральные траектории коммутатора $[X, Y]$. Отсюда вытекает, что $[X, Y](a) \in \Pi_a$ для всех $a \in M$.

Пусть теперь $M = \mathbb{R}^3$ (с координатами (p, q, z)), и $\nu(p, q, z) = dz + pdq$. Определим $\Pi_a = \{v \in T_a\mathbb{R}^3 \mid \langle \nu(a), v\rangle = 0\}$ и покажем, что в $\mathbb{R}^3$ не существует двумерного подмногообразия (поверхности) N, для которого $\Pi_a = T_aN$ для всех $a \in N$.

Пусть такое подмногообразие N существует. Обозначим $X = \frac{\partial}{\partial p}$, $Y = p\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial q}$. Тогда $\langle \nu, X\rangle = \langle \nu, Y\rangle = 0$ при всех $a = (p, q, z) \in \mathbb{R}^3$. Тем самым, $X(a), Y(a) \in \Pi_a$ при всех a. Коммутатор $[X, Y]$ равен $\frac{\partial}{\partial z}$, и $\langle \nu, [X, Y]\rangle = 1 \neq 0$ во всех точках. Следовательно, $[X, Y](a) \notin \Pi_a$, вопреки сказанному выше.

Следовательно, форма $\nu = dz + pdq$ не только не является замкнутой, но и не представима в виде gdf.