ЛЕКЦИЯ 2

Пусть M — гладкое многообразие размерности m. Подмножество $N \subset M$ называется подмногообразием (размерности $n \le m$), если на M существует такой атлас $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha = (x_\alpha^{(1)}, \dots, x_\alpha^{(m)})\}$, что для всякого α пересечение $N \cap U_\alpha$ либо пусто, либо равно множеству $\{a \in U_\alpha \mid x_\alpha^{(n+1)}(a) = \dots = x_\alpha^{(m)}(a) = 0\}$. Иными словами, подмногообразие это подмножество M, локально задаваемое набором гладких уравнений. На подмногообразии имеется естественная структура n-мерного многообразия: ее образуют карты $U'_\alpha = U_\alpha \cap N$ и координатные отображения $x'_\alpha = (x_\alpha^{(1)}, \dots, x_\alpha^{(n)}) : U'_\alpha \to U'_\alpha$, где $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — множество, полученное проекцией множества $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ на линейное подпространство, порожденное первыми n векторами стандартного базиса.

Пример 1. Множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$. Индуцированная на нем структура одномерного многообразия совпадает с той, которую мы уже описывали (S^1) — проверьте !

Пример 2. Интервал $(0, 1)$ обладает естественной структурой одномерного многообразия (он диффеоморфен $\mathbb{R}^1$). Тем не менее, как подмножество $\mathbb{R}^1$ он подмногообразием не является. Действительно, если $(0, 1) \subset \mathbb{R}^1$ — одномерное подмногообразие, то на $\mathbb{R}^1$ должен существовать атлас, каждая из карт которого либо не пересекается с $(0, 1)$, либо содержится в нем — нетрудно видеть, что это невозможно (в силу связности прямой).

Пример 3. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Рассмотрим гладкое отображение (кривую) $\gamma_s : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$, переводящее число $t \in \mathbb{R}$ в точку $\pi(t, st) \in \mathbb{T}^2$, где $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ — естественная проекция (сопоставляющая каждой точке $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ее смежный класс по модулю подгруппы $\mathbb{Z}^2$ — этот смежный класс является элементом фактора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$). Если $s = m/n \in \mathbb{Q}$, то образ отображения γ_s — одномерное подмногообразие в $\mathbb{T}^2$, диффеоморфное окружности. Если $s \notin \mathbb{Q}$, то образ гомеоморфен прямой $\mathbb{R}^1$, но подмногообразием не является. Это утверждение (как и утверждение примера 2) вытекает, например, из такого утверждения:

Предложение 1. *Подмногообразие $N \subset M$ замкнуто.*

Доказательство. Рассмотрим атлас $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$, упомянутый в определении подмногообразия. Тогда для всякого α имеем: $x_\alpha((M \setminus N) \cap U_\alpha) = V_\alpha \cap (\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^n \mid z_{n+1} \ne 0\} \cup \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^n \mid z_{n+2} \ne 0\} \cup \dots \cup \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^n \mid z_m \ne 0\})$. В правой части здесь стоит пересечение открытого множества с объединением $m - n$ открытых множеств, т.е. открытое множество. Согласно определению топологии на M это означает, что множество $M \setminus N$ открыто, а множество N, следовательно, замкнуто. $\square$

Понятие гладкого многообразия имеет многочисленные варианты и обобщения. Например, *гладким n-мерным многообразием с краем* называется множество M, на котором задан атлас $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)\}$, удовлетворяющий всем условиям из определения гладкого многообразия, за исключением того, что множеству V_α разрешается теперь быть либо открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$, либо открытым подмножеством в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Если точка $a \in M$ покрыта картой U_α, для которой V_α — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, то она называется внутренней точкой многообразия M ($a \in \text{int}(M)$). Если же точка a покрыта картой U_α, в которой V_α — открытое подмножество $\mathbb{R}^n_+$, то говорят, что a — точка края M ($a \in \partial M$).

Предложение 2. *Множества* $\text{int}(M)$ *и* ∂M *не пересекаются. Множество* $\text{int}(M)$ *(внутренность) имеет естественную структуру n-мерного многообразия (без края !), а множество ∂M (край) — естественную структуру многообразия размерности $n-1$.*

Мы не будем доказывать это утверждение. Примеры многообразий с краем многочисленны: скажем, полусфера (край — сфера на единицу меньшей размерности), или полноторие в $\mathbb{R}^3$ (край — двумерный тор).

Пусть M — многообразие размерности n, $a \in M$ — его точка, и (U, V, x) — какая-нибудь карта, покрывающая точку a. Обозначим Γ_a множество всех кривых (т.е. гладких отображений $\gamma : \mathbb{R}^1 \to M$), таких что $\gamma(0) = a$. Будем говорить, что две кривые $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_a$ касаются в точке a, если $x(\gamma_1(t)) - x(\gamma_2(t)) = o(t)$ при $t \to 0$. Нетрудно видеть, что факт касания зависит только от кривых γ_1 и γ_2 и от точки a, но не зависит от выбора координат (U, V, x) (это следует из того, что отображения перехода гладкие).

Теорема 1. *Отношения касания двух кривых в данной точке a является отношением эквивалентности на множестве Γ_a. Множество классов эквивалентности имеет естественную структуру векторного пространства размерности n.*

Определение. Это векторное пространство называется касательным пространством к многообразию M в точке a и обозначается T_aM.

Доказательство. Рефлексивность (каждая кривая касается самой себя) и симметричность (если первая кривая касается второй, то вторая касается первой) отношения касания очевидны. Транзитивность: если γ_1 касается γ_2 касается γ_3, то $x(\gamma_3(t)) - x(\gamma_1(t)) = x(\gamma_3(t)) - x(\gamma_2(t)) + x(\gamma_2(t)) - x(\gamma_1(t)) = o(t) + o(t) = o(t)$ (при $t \to 0$).

Чтобы ввести на T_aM структуру векторного пространства, зафиксируем вначале систему координат $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда каждой кривой $\gamma \in \Gamma_a$ сопоставляется набор функций с действительными значениями: $f_1[\gamma](t) = x_1(\gamma(t)), \dots, f_n[\gamma](t) = x_n(\gamma(t))$, причем $f_i[\gamma](0) = 0$, и каждая функция $f_i[\gamma]$ определена в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}$. Из формулы Тейлора порядка 1 следует, что кривые γ_1 и γ_2 касаются в точке a тогда и только тогда, когда $f_i[\gamma_1]'(0) = f_i[\gamma_2]'(0)$ для любого i. Тем самым, класс эквивалентности, к которому принадлежит данная кривая γ, полностью определяется набором чисел $v(\gamma) = (f_1[\gamma]'(0), \dots, f_n[\gamma]'(0))$. Нетрудно также видеть, что для любого набора чисел $v = (v_1, \dots, v_n)$ существует кривая $\gamma \in \Gamma_a$, для которой $v(\gamma) = v$. Это позволяет ввести на множестве T_aM классов эквивалентности кривых операции сложения и умножения на число — следует просто покомпонентно складывать и умножать на число соответствующие наборы чисел $v(\gamma)$. Естественно называть (см. ниже пример 4) набор $v(\gamma)$ скоростью кривой γ в момент времени $t = 0$, вычисленной по отношению к системе координат x.

Введенная таким образом структура векторного пространства (размерности n) на множестве $T_a M$ могла бы, в принципе, зависеть от выбора системы координат x — т.е. не быть канонической. Покажем, что это не так. Для этого выберем в окрестности точки a другую систему координат, $y = (y_1, \dots, y_n)$, и пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — отображения перехода (так что $y_i(b) = \varphi_i(x_1(b), \dots, x_n(b))$ для всякой точки $b \in M$, достаточно близкой к a). Рассмотрим теперь кривую $\gamma \in \Gamma_a$, и пусть $v(\gamma) = (v_1, \dots, v_n)$ — ее скорость в момент времени $t = 0$ по отношению к системе координат x, а $w(\gamma) = (w_1, \dots, w_n)$ — по отношению к системе координат y. Тогда из формулы (многомерной) для производной сложной функции следует, что $w_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, \dots, 0) v_j$, т.е. $w(\gamma) = Av(\gamma)$, где A — матрица с постоянными коэффициентами. Отсюда следует, что если $v(\gamma) = v(\gamma_1) + v(\gamma_2)$, то $w(\gamma) = w(\gamma_1) + w(\gamma_2)$, и аналогично для умножения на число. $\square$

Пример 4. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие размерности $m \le n$, и $a \in M$ — его точка. Тогда кривую $\gamma \in \Gamma_a$ можно себе представить как гладкое отображение $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, такое что $\gamma(t) \in M$ при всех t, и $\gamma(0) = a$. Нетрудно видеть (докажите !), что две кривые $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_a$ касаются тогда и только тогда, когда $(\gamma_1^{(i)})'(0) = (\gamma_2^{(i)})'(0)$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тем самым $T_a M$ можно представить себе как m-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, составленное из всевозможных скоростей кривых, проходящих через точку a.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ положительно определенное скалярное произведение. Перенесем подпространство $T_a M$ на вектор a, и получим аффинное подпространство $L_a M \stackrel{\text{def}}{=} a + T_a M \subset \mathbb{R}^n$ размерности m, такое что $a \in L_a M$. Рассмотрим для каждой точки $u \in L_a M$ точку $R(u) \in M$, ближайшую к u (существование $R(u)$ вытекает из несложного рассуждения, использующего компактность — проведите ! Единственность не имеет места и не требуется.), и пусть $\varrho(u) = |u - R(u)|$ — расстояние от точки u до многообразия M. Зафиксируем какой-нибудь вектор $v \in T_a M$; тогда, как нетрудно видеть, $\varrho(a + vt) = o(t)$ при $t \to 0$. Понятно также (докажите !) что верно и обратное: если $\varrho(a + vt) = o(t)$ при $t \to 0$, то $v \in T_a M$. Это и дает основание называть $T_a M$ касательным пространством.