ЛЕКЦИЯ 3

Вот пример того, как вычисляется касательное пространство у многообразия, не вложенного в $\mathbb{R}^n$:

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}P^n$ — множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат, и $\ell \in \mathbb{R}P^n$ — такая прямая. Тогда касательное пространство $T_\ell \mathbb{R}P^n$ можно отождествить с множеством линейных отображений из ℓ в факторпространство $\mathbb{R}^{n+1}/\ell$.

Отождествление производится так. Пусть $v \in \ell$ — какой-нибудь вектор, и пусть $\gamma \in \Gamma_\ell$ — кривая на $\mathbb{R}P^n$, представляющая элемент $x \in T_\ell \mathbb{R}P^n$. Выберем непрерывное семейство векторов $u(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такое, что $u(0) = v$, и $u(t) \in \gamma(t)$ при всех t. Сопоставим этому семейству вектор $u'(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Указанная конструкция неоднозначна, поскольку семейство векторов $u(t)$ можно выбрать многими способами. Если одно такое семейство выбрано, причем $u(t) \neq 0$ при достаточно малых t, то любое другое семейство представляется в виде $w(t) = \alpha(t)u(t)$, где $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ и $\alpha(0) = 1$ (напомним, что вектор $w(0) = u(0) = v$ фиксирован, и для всякого t имеем $w(t), u(t) \in \gamma(t)$, а $\gamma(t)$ — прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, так что любые два вектора в ней пропорциональны). Тогда имеем: $w'(0) = \alpha(0)u'(0) + \alpha'(0)u(0) = u'(0) + \alpha'(0)v$, откуда следует, что образы векторов $u'(0)$ и $w'(0)$ при отображении факторизации $\pi_\ell : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}/\ell$ одинаковы. Тем самым для каждой кривой γ в многообразии $\mathbb{R}P^n$ такой, что $\gamma(0) = \ell$, определено отображение A_γ, ставящее в соответствие каждому вектору $v \in \ell$ однозначно определенный вектор $u'(0) \in \mathbb{R}^{n+1}/\ell$.

Если кривые γ_1 и γ_2 касаются, то $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$ (поскольку отображение A_γ определено при помощи только первой производной). Тем самым отображение A_γ зависит только от элемента $x \in T_\ell \mathbb{R}P^n$, представляемого кривой γ; мы будем обозначать его A_x.

Нетрудно видеть, что а) оператор $A_x : \ell \to \mathbb{R}^{n+1}/\ell$ линейный. б) соответствие $x \mapsto A_x$ также линейное, т.е. $A_{x+y} = A_x + A_y$, и $A_{\alpha x} = \alpha A_x$; в) соответствие $x \mapsto A_x$ — взаимно однозначное отображение $T_\ell \mathbb{R}P^n \to \mathrm{Hom}(\ell, \mathbb{R}^{n+1}/\ell)$, т.е. каждому линейному оператору $A : \ell \to \mathbb{R}^{n+1}/\ell$ соответствует ровно один элемент $x \in T_\ell \mathbb{R}P^n$ такой, что $A = A_x$.

Тем самым построен линейный изоморфизм пространств $T_\ell \mathbb{R}P^n$ и $\mathrm{Hom}(\ell, \mathbb{R}^{n+1}/\ell)$.

Пусть M — произвольное многообразие размерности m, $a \in M$, и $(U, V, x = (x_1, \dots, x_m))$ — карта на M в окрестности точки a. Рассмотрим на M кривые $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ такие, что $x_i(\gamma_i(t)) = x_i(a) + t$ для всех $i = 1, \dots, m$, а при произвольном $j \neq i$ выполнено равенство $x_j(\gamma_i(t)) = x_j(a) = const$. Все кривые γ_i принадлежат множеству Γ_a; векторы пространства $T_a M$, представляемые кривыми γ_i, обозначаются $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a)$. Нетрудно видеть, что эти векторы образуют в пространстве $T_a M$ базис.

Пусть теперь в окрестности точки a задана другая карта, $\widetilde{U}$, и в ней система координат y с функциями перехода $y_i(b) = \varphi_i(x_1(b), \dots, x_m(b))$. Тогда $y_i(\gamma_k(t)) = \varphi_i(x_1(a), \dots, x_k(a) + t, \dots, x_m(a))$, откуда видно, что кривая $\gamma_k(t)$

представляет вектор $\sum_{i=1}^m \frac{dy_i(\gamma_k(t))}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial y_i}(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x(a))\frac{\partial}{\partial y_i}(a)$. Тем самым, матрица перехода от базиса $\frac{\partial}{\partial y}(a)$ к базису $\frac{\partial}{\partial x}(a)$ (именно в эту сторону !) есть $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x(a))\right)$.

Пусть теперь N — многообразие размерности N, $f : M \to N$ — гладкое отображение, $a \in M$ и $\gamma \in \Gamma_a$. Кривая $f \circ \gamma : \mathbb{R}^1 \to N$ принадлежит множеству $\Gamma_{f(a)}$. Из гладкости отображения f вытекает, что если кривые γ_1 и γ_2 касаются друг друга в точке a, то кривые $f \circ \gamma_1$ и $f \circ \gamma_2$ касаются друг друга в точке $f(a)$. Поэтому определено отображение $f'(a) : T_aM \to T_{f(a)}N$, называемое производной отображения f в точке a.

Зафиксируем карты (U_M, V_M, x) и (U_N, V_N, y) на многообразиях M и N соответственно, так чтобы $a \in U_M$, $f(a) \in U_N$. Тем самым в пространствах T_aM и $T_{f(a)}N$ зафиксированы базисы $\frac{\partial}{\partial x}(a)$ и $\frac{\partial}{\partial y}(f(a))$.

Теорема 1. *Отображение $f'(a)$ — линейное. Его матрица в указанных базисах равна $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x(a))\right)$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = y \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (отображение f, записанное в координатах x и y).*

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma_a$ — кривая на многообразии M, представляющая вектор $\sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$. Тогда $y_j(f(\gamma(t)) = y_j(f(a)) + t \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial y_j(f(x^{-1}(\xi_1,\dots,\xi_m))}{\partial \xi_k}(x(a))\ \frac{dx_k(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} + o(t) = y_j(f(a)) + t \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_j(\xi_1,\dots,\xi_m))}{\partial \xi_k}(x(a))u_k + o(t)$, откуда следует, что $f'(a)$ — отображение линейное, и его матрица в указанных базисах равна $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x(a))\right)$. $\square$

Пусть M — произвольное многообразие. Обозначим $C^\infty(M)$ множество гладких функций на M (т.е. гладких отображений $M \to \mathbb{R}^1$). Нетрудно видеть, что множество $C^\infty(M)$ является коммутативной ассоциативной алгеброй над полем $\mathbb{R}$, т.е. гладкие функции можно складывать, умножать друг на друга и на действительные числа, и результат опять будет являться гладкой функцией.

Пусть $a \in M$. Обозначим $\mathfrak{m}_a = \{f \in C^\infty(M) \mid f(a) = 0\}$.

Теорема 2. *Множество $\mathfrak{m}_a \subset C^\infty(M)$ является идеалом. Если многообразие M компактно, то этот идеал максимален, и всякий максимальный идеал в алгебре $C^\infty(M)$ имеет вид $\mathfrak{m}_a$ для какой-либо точки $a \in M$.*

Замечание. Если M некомпактно, то $\mathfrak{m}_a$ все равно — максимальный идеал (мы докажем это позднее). Тем не менее, в алгебре $C^\infty(M)$ в этом случае имеются максимальные идеалы, не равные никакому $\mathfrak{m}_a$, см. ниже пример 2.

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество $\mathfrak{m}_a$ действительно является идеалом. На самом деле, если $f_1(a) = f_2(a) = 0$, то $(f_1 + f_2)(a) = 0$, и $(gf)(a) = 0$ для произвольной функции $g \in C^\infty(M)$.

Для доказательства второй части теоремы нам потребуется такое утверждение (которое мы докажем в одной из следующих лекций):

Лемма. *Для любых двух различных точек $a, b \in M$ существует функция $f \in C^\infty(M)$ такая, что $f(a) = 0$ и $f(b) \neq 0$.*

Пусть теперь M компактно. Для доказательства максимальности рассмотрим функцию $f \notin \mathfrak{m}_a$ и покажем, что идеал, порожденный $\mathfrak{m}_a$ и f, тривиален.

Для произвольной функции φ положим $U_\varphi = \{x \in M \mid \varphi(x) \neq 0\}$. Поскольку функции $g \in \mathfrak{m}_a$ и функция f непрерывны, все множества U_g, $g \in \mathfrak{m}_a$, а также множество U_f, открыты. В силу леммы и того факта, что $f \notin \mathfrak{m}_a$, эти множества вместе образуют открытое покрытие многообразия M. Из компактности M следует, что, найдется конечное количество таких функций $g_1, \dots, g_N \in \mathfrak{m}_a$, что $M = \bigcup_{i=1}^N U_{g_i} \cup U_f$. Следовательно, функция $r(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x) + \varphi^2(x) > 0$ при всех $x \in M$.

Функция r принадлежит идеалу, порожденному $\mathfrak{m}_a$ и f. С другой стороны, она не имеет нулей, и поэтому $1/r \in C^\infty(M)$. Но тогда указанному идеалу принадлежит и функция $r \cdot 1/r = 1$, откуда вытекает, что идеал тривиален. □

Пример 2. Покажем, что условие компактности в теореме существенно. Пусть $M = \mathbb{R}^1$, и $J \subset C^\infty(M)$ — множество гладких функций, отличных от нуля только на некотором отрезке (своем для каждой функции). Примером такой функции является функция $f(t) = \begin{cases} \exp(-1/(1-t^2)^2), & \text{если } |t| < 1, \\ 0, & \text{если } |t| \geq 1 \end{cases}$. Множество J является идеалом; согласно лемме Цорна существует максимальный идеал $I \subset C^\infty(M)$ такой, что $J \subset I$. Идеал I не может совпадать ни с одним идеалом $\mathfrak{m}_a$, поскольку уже функции $f \in J$ не имеют общих нулей.