ЛЕКЦИЯ 4

Лемма 1. *Существует функция $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\varrho(x) = 0$ при всех $x \le 0$ и $\varrho(x) > 0$ при всех $x > 0$.*

Доказательство. Положим $\varrho(x) = 0$ при $x \le 0$, и $\varrho(x) = e^{-1/x}$ при $x > 0$. Требует доказательства только гладкость функции ϱ при $x = 0$. Нетрудно проверить, что при $x > 0$ производная $\varrho^{(n)}(x)$ равна $P_n(x)e^{-1/x}$, где P_n — некоторая дробно-рациональная функция. Предположим теперь (индукция по n), что производная $\varrho^{(n)}(0)$ существует и равна нулю. Тогда, по определению производной, $\varrho^{(n+1)}(+0) = \lim_{x\to+0} P_n(x)e^{-1/x}/x = 0$. Равенство $\varrho^{(n+1)}(-0) = 0$ очевидно, откуда вытекает, что $\varrho^{(n+1)}(0)$ также существует и равна нулю. $\square$

Лемма 2. *Существует функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\mu(x) = 0$ при $|x| \ge 1$, и $\mu(x) > 0$ при всех остальных x.*

Доказательство. Можно взять $\mu(x) = e^{1/(x^2-1)}$ при $|x| < 1$ и $\mu(x) = 0$ при $|x| \ge 1$. Доказательство бесконечной гладкости — такое же, как в лемме 1. $\square$

Лемма 3. *Для любых двух положительных чисел $r < R$ существует функция $\lambda_{rR} \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\lambda_{rR}(x) = 1$ при $|x| \le r$, $\lambda_{rR}(x) = 0$ при $|x| \ge R$, и $0 < \lambda(x) < 1$ при прочих x.*

Доказательство. Можно взять $\lambda_{rR}(x) = \ell_{rR}(x)/\ell_{rR}(0)$, где $\ell_{rR}(x) = \int_{x-(r+R)/2}^{x+(r+R)/2} \mu(2x/(R-r))\,dx$, а μ — функция из леммы 2. $\square$

Лемма 4. *Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар, а $W \subset \mathbb{R}^n$ — концентрический ему открытый шар большего радиуса. Тогда существует функция $\varphi_{BW} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi_{BW}(x) = 1$ для всех $x \in B$, $\varphi_{BW}(x) = 0$ для всех $x \notin W$, и $0 < \varphi_{BW}(x) < 1$ для всех $x \in W \setminus B$.*

Доказательство. Пусть центр B и W —точка $a \in \mathbb{R}^n$, а радиусы равны r и R соответственно. Тогда положим $\varphi_{BW}(x) = \lambda_{rR}(\,|x-a|)$, где λ_{rR} — функция из леммы 3. $\square$

Лемма 4 позволяет доказать лемму из предыдущей лекции. Действительно, пусть $a, b \in M$, и точка b покрыта картой (U, V, x). Рассмотрим в множестве $V \subset \mathbb{R}^n$ два концентрических шара B, W с центром $x(b)$ настолько малых, чтобы $a \notin x^{-1}(W)$. Тогда функция f, заданная формулой $f(p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{BW}(x(p))$ при $p \in U$, и равная нулю для $p \notin U$, удовлетворяет условиям $f(a) = 0$, $f(b) = 1$.

Кроме того, верно такое уточнение теоремы 2 из предыдущей лекции:

Теорема 2'. *Идеал $\mathfrak{m}_a \subset C^\infty(M)$ является максимальным также и в случае, когда многообразие M некомпактно.*

Доказательство. Пусть точка a покрыта картой (U, V, x), и пусть $f \notin \mathfrak{m}_a$ (для определенности $f(a) > 0$). Выделим в множестве $V \subset \mathbb{R}^n$ замкнутые шары $B_1 \subset W_1 \subset B_2 \subset W_2$ с центром в точке $x(a)$ и такие, что $f(b) > 0$ при $x(b) \in W_2$. Тогда функция $\alpha(b) = f(b)\varphi_{B_2W_2}(x(b)) + (1 - \varphi_{B_1W_1}(x(b))$ строго положительна при всех $x \in U$; если ее продолжить единицей на все многообразие M, то продолженная функция (обозначим ее также α) будет гладкой и нигде не будет обращаться в нуль. Но $\alpha \in \langle f, \mathfrak{m}_a\rangle$, откуда $1 = \alpha \cdot 1/\alpha \in \langle f, \mathfrak{m}_a\rangle$, и идеал $\langle f, \mathfrak{m}_a\rangle$ тривиален. $\square$

Пусть $\gamma \in \Gamma_a$ — кривая на многообразии M. Сопоставим каждой функции $f \in C^\infty(M)$ число $A_\gamma(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$.

Предложение 1.
1. *Функционал $A_\gamma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ линеен и удовлетворяет тождеству Лейбница: $A_\gamma(fg) = A_\gamma(f)g(a) + f(a)A_\gamma(g)$.*
2. *Если $f \in \mathfrak{m}_a^2$, то $A_\gamma(f) = 0$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго напомним, что множество $\mathfrak{m}_a^2$ состоит из всех функций вида $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i\beta_i$, для которых $\alpha_i, \beta_i \in \mathfrak{m}_a$. Тогда $A_\gamma(f) = \sum_{i=1}^N A_\gamma(\alpha_i)\beta_i(a) + \alpha_i(a)A_\gamma(\beta_i) = 0$. $\square$

Тем самым отображение A_γ можно считать элементом пространства $(\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2)^*$.

Нетрудно видеть, что если кривые γ_1 и γ_2 касаются друг друга в точке a, то $A_{\gamma_1}(f) = A_{\gamma_2}(f)$ для всякой функции f. Тем самым, $A_\gamma(f)$ зависит только от элемента $v \in T_aM$, представляемого кривой γ. Сопоставляя каждому вектору $v \in T_aM$ функционал $A_v \stackrel{\text{def}}{=} A_\gamma \in (\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2)^*$, мы получаем отображение $A : T_aM \to (\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2)^*$.

Теорема 1. *Отображение $A : T_aM \to (\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2)^*$ является линейным изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть (U, V, x) — карта, покрывающая точку a, и $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$. Тогда без ограничения общности можно считать, что v представлен кривой γ, для которой $x_i(\gamma(t)) = x_i(a) + v_i t$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $A_\gamma(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(a))v_i$, и линейность доказана. Из этой же формулы вытекает, что $\mathrm{Ker}(A) = 0$: пусть $\forall f \in \mathfrak{m}_a$ $A_v(f) = 0$. Зафиксируем индекс i и рассмотрим функцию f такую, что $\frac{\partial f\circ x^{-1}}{\partial x_i}(x(a)) = 1$ и $\frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(a)) = 1$ для всех $j \neq i$ (например, можно взять $f(b) = x_i(b)\varphi_{BW}(x(b))$, где φ_{BW} — функция из леммы 4). Тогда $v_i = 0$, т.е. ядро тривиально.

Докажем теперь, что образом отображения A является все пространство $(\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2)^*$, т.е. для каждого линейного функционала $\lambda : \mathfrak{m}_a \to \mathbb{R}$, равного нулю на подпространстве $\mathfrak{m}_a^2 \subset \mathfrak{m}_a$, существует вектор $v \in T_aM$ такой, что $\lambda = A_v$. Для этого нам потребуются такое утверждение:

Лемма (Адамар). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $f(0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, то существуют такие гладкие функции $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_n$, что $f = \sum_{i=1}^n g_i h_i$ и $g_i(0) = h_i(0) = 0$ для всех i (в частности, $f \in \mathfrak{m}_0^2$).*

Доказательство леммы Адамара. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$ и положим $\varphi(t) = f(tx)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, и имеем $f(x) = \varphi(1) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt$. Положим теперь $g_i(x) = x_i$, $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt$. □

Для доказательства эпиморфность отображения $A : T_aM \to (\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2)^*$ рассмотрим сначала функцию $f \in C^\infty(M)$, равную нулю на некотором открытом множестве $Z \subset M$, содержащем точку a. Пусть $B \subset W \subset V$ — два шара с центрами в точке $x(a) \in V$, и $\varrho = \varphi_{B,W} \circ x$, где $\varphi_{B,W}$ — функция из леммы 4. Тогда $f = \varrho g$, где g — гладкая функция на M, равная 0 на множестве Z. Поскольку $\varrho, g \in \mathfrak{m}_a$, получаем, что $f \in \mathfrak{m}_a^2$. Из предложения 1 вытекает теперь, что $\lambda(f) = 0$.

Пусть теперь функция $f \in C^\infty(M)$ такова, что $\frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(a)) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Положим для удобства $x(a) = 0$ и рассмотрим два шара $B, W \subset V$ с центром в 0. Функция $f\varphi_{B,W}$ совпадает с функцией f в некоторой окрестности точки a, откуда в силу только что доказанного утверждения получаем, что $\lambda(f - f\varphi_{B,W}) = 0$, т.е. $\lambda(f) = \lambda(f\varphi_{B,W})$. Функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, равная $(f\varphi_{B,W}) \circ x^{-1}$ на множестве W и нулю вне этого множества — гладкая, и удовлетворяет условиям леммы Адамара. Тогда $f\varphi_{B,W}(b) = \sum_{i=1}^n g_i(x(b))h_i(x(b))$, откуда вытекает, что $f\varphi_{B,W} \in \mathfrak{m}_a^2$ и, следовательно, $\lambda(f) = \lambda(f\varphi_{B,W}) = 0$.

Таким образом, если имеются две функции $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ такие, что $\frac{\partial(f_1\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(a)) = \frac{\partial(f_2\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(a))$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $\lambda(f_1 - f_2) = 0$, то есть $\lambda(f_1) = \lambda(f_2)$. Таким образом, значение функционала λ на функции f полностью определяется набором производных $\frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(a))$, $i = 1, \dots, n$. В силу линейности получаем, что существуют такие константы $v_1, \dots, v_n$, что $\lambda(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(a))v_i$, т.е. $\lambda(f) = A_v(f)$, где $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$. □