ЛЕКЦИЯ 5

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Напоминание 1. Пусть V — конечномерное векторное пространство, а $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ — сопряженное пространство. Тогда всякому базису $v_1, \dots, v_n$ в V соответствует двойственный базис $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$, определяемый равенствами $v_i^*(v_i) = 1$, $v_i^*(v_j) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и произвольного $j \neq i$.

Напоминание 2. Пусть $A : V \to W$ — линейный оператор; тогда ему соответствует сопряженный оператор $A^* : W^* \to V^*$, определяемый равенством $A^*(\nu)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(A(v))$. Сопряжение обладает такими свойствами: $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$. Если в V, W введены базисы $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$, а в V^*, W^* — соответствующие двойственные базисы, то матрицы операторов A и A^* в этих базисах отличаются транспонированием.

Напоминание 3. Имеется естественный изоморфизм векторных пространств $\tau : V \to (V^*)^*$ — вектору v соответствует функционал $\tau(v) : V^* \to \mathbb{R}$, действующий по правилу $\tau(v)(\nu) = \nu(v)$. Этот изоморфизм функториален, т.е. совместим с понятием двойственного оператора: если $A : V \to W$ — линейный оператор, а $A^{**} : (V^*)^* \to (W^*)^*$ — оператор, двойственный к A^*, то $A^{**}(\tau(v)) = \tau(A(v))$ для всякого $v \in V$. Этот изоморфизм также совместим с понятием двойственного базиса: базис $\tau(v_1), \dots, \tau(v_n)$ — двойственный к $v_1^*, \dots, v_n^*$.

В лекции 4 мы определили изомофизм векторных пространств $\ell : T_aM \to (\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2)^*$, при котором вектору $v \in T_aM$, представляемому кривой γ, соответствует функционал $\ell_v : \mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2 \to \mathbb{R}$, значение которого на функции f равно $\left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$.

Предложение 1. *Пусть (U, V, x) — некоторая система координат на многообразии M в окрестности точки a. Тогда базису $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)$ соответствует при изоморфизме ℓ базис в $(\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2)^*$, двойственный к базису $\varrho x_1, \dots, \varrho x_n$ в $\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2$, где ϱ — произвольная гладкая функция, равная 1 в некоторой окрестности точки a и 0 за пределами карты U.*

Доказательство. Пусть γ_i — кривая, представляющая класс $\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, т.е. $x_i(\gamma_i(t)) = x_i(a) + t$, $x_j(\gamma_i(t))) = x_j(a)$ при $j \neq i$. Тогда $\ell_{\gamma_i}(\varrho x_i) = \frac{d}{dt}\varrho(\gamma(t))(x_i(a) + t)\big|_{t=0} = 1$, и аналогично $\ell_{\gamma_i}(\varrho x_j) = 0$. □

Всякому гладкому отображению $F : M \to N$, переводящему точку a в точку $F(a)$, соответствует гомоморфизм алгебр $\tilde{F} : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, действующий по правилу $\tilde{F}(f) = f \circ F$. Нетрудно видеть, что $\tilde{F}(\mathfrak{m}_{F(a)}) \subset \mathfrak{m}_a$ и $\tilde{F}(\mathfrak{m}_{F(a)}^2) \subset \mathfrak{m}_a^2$, откуда вытекает, что имеется линейное отображение $\tilde{F} : \mathfrak{m}_{F(a)} \,/\, \mathfrak{m}_{F(a)}^2 \to \mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2$.

Предложение 2. *Образ производной $F'(a) : T_aM \to T_{F(a)}N$ при гомоморфизме ℓ — оператор, двойственный к $\tilde{F}$.*

Доказательство. Введем в многообразиях M, N карты (U, x) и (W, y) в окрестности точек a и $F(a)$, и пусть $y_i(F(b)) = \varphi_i(x_1(b), \dots, x_m(b))$ для произвольной точки $b \in U$ (т.е. "$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — запись отображения F в координатах x, y").

Вычислим матрицы обоих операторов в базисах $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a)$ и $\frac{\partial}{\partial y_1}(F(a)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(F(a)$. Известно, что матрица (μ_{ij}) оператора $F'(a)$ равна $\mu_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(a))$. С другой стороны, применяя результат предложения 1, получим $\tilde{F}(\ell_{\partial/\partial y_i})(b) = \tilde{F}(\varrho y_i)(b) = \varrho(F(b))\varphi_i(x(b))$ для произвольного $b \in U$. По лемме Адамара произвольная функция $r \in \mathfrak{m}_a$ совпадает, с точностью до элемента $\mathfrak{m}_a^2$, с первым членом своего ряда Тейлора. Поскольку $\varrho(F(b)) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки a, получим, что $\tilde{F}(\ell_{\partial/\partial y_i})$ равен, как элемент пространства $\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2$, выражению $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x(a))(F \circ \varrho) \cdot x_j$, т.е. $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x(a))\frac{\partial}{\partial x_j}$. Действительно, полученная матрица отличается от матрицы $F'(a)$ транспонированием. □

Пусть M — гладкое многообразие размерности n. *Векторным расслоением* ранга r с базой M называется пара, состоящая из гладкого многообразия Q размерности $n+r$ и гладкого отображения $p : Q \to M$, с такими свойствами:

1. Для всякого атласа $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$ в многообразии M в многообразии Q имеется атлас $(\tilde{U}_\alpha, \tilde{V}_\alpha, \tilde{x}_\alpha)$, где $\tilde{U}_\alpha = p^{-1}(U_\alpha)$, $\tilde{V}_\alpha = V_\alpha \times \mathbb{R}^r$, $\tilde{x}_\alpha(a) = (x_\alpha(p(a)), y_\alpha(a))$, где $y_\alpha(a) \in \mathbb{R}^r$.

2. Если $(U_\beta, V_\beta, x_\beta)$ — другая карта, покрывающая точку a, то существует такое отображение $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^r)$, что $y_\alpha(b) = \varphi_{\alpha\beta}(p(b))y_\beta(b)$ для всякой точки $b \in \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$.

Пример 1. Прямое произведение $Q = M \times \mathbb{R}^r$, где p — проекция на первый сомножитель, является векторным расслоением (его называют тривиальным). Действительно, в качестве $y_\alpha(a)$ можно взять проекцию на второй сомножитель, и положить $\varphi_{\alpha\beta} = \mathrm{Id}$ для всех α, β.

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}P^n$, $Q = \{(\ell, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in \ell\}$, $p : Q \to M$ — проекция на первый сомножитель. Тогда в Q можно ввести структуру векторного расслоения ранга 1 с базой $\mathbb{R}P^n$. Действительно, пусть $\ell = (x_0 : \dots : x_n)$; тогда $(\ell, v) \in Q$ при условии $v = (v_0, \dots, v_n) = (tx_0, tx_1, \dots, tx_n)$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$ (заметим, что $t = 0$ возможно !). Пусть $U_i = \{\ell = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$; тогда можно положить $y_i(\ell, v) = v_i$. Отображения перехода между картами U_i и U_j очевидны: $\varphi_{ij}(x_0 : \dots : x_n) = x_j/x_i$, где число (не равное нулю) в правой части рассматривается как обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Это расслоение над $\mathbb{R}P^n$ называется тавтологическим; аналогично определяется тавтологическое расслоение над многообразием Грассмана $G(n, k)$.

Прообраз $p^{-1}(b) \subset Q$ точки $b \in M$ называется слоем расслоения над этой точкой. Важнейшим свойством слоя векторного расслоения является то, что в нем имеется структура векторного пространства: суммой точек $a_1, a_2 \in p^{-1}(b)$ является точка $a \in p^{-1}(b)$ такая, что $y_\alpha(a) = y_\alpha(a_1) + y_\alpha(a_2)$, и аналогично для умножения на число. Поскольку оператор $\varphi_{\alpha\beta}(b) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ линейный, это определение сложения и умножения на число не зависит от выбора координат U_α в окрестности точки b.