ЛЕКЦИЯ 6

Для произвольного многообразия M имеется векторное расслоение TM ранга n, называемое касательным. Как множество, TM представляет собой объединение касательных пространств к M во всевозможных точках $a \in M$, причем считается, что разные пространства не пересекаются. Проекция $p : TM \to M$ сопоставляет точке $(a, v) \in M$ точку a; здесь подразумевается, что $v \in T_aM$. Структура расслоения вводится так: для произвольной карты (U, x) в окрестности точки $b \in M$ и произвольного вектора $v \in T_bM$ положим $y_x(b) = (v_1, \dots, v_n)$, где $v_1, \dots, v_n$ — координаты вектора v в базисе $\frac{\partial}{\partial x_1}(b), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(b)$. Если (W, z) — другая система координат в окрестности b, причем $z_i(q) = \varphi_i(x_1(q), \dots, x_n(q))$, где $q \in U \cap W$, то, как уже неоднократно доказывалось, $y_z(v) = (w_1, \dots, w_n)$, где $w_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(b))v_j$. Тем самым, $\varphi_{UW} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ это линейное отображение с матрицей $\alpha_{ij} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(b))$.

Морфизмом расслоений $f : (E_1, B_1, p_1) \to (E_2, B_2, p_2)$ называется пара гладких отображений $f : B_1 \to B_2$ и $F : E_1 \to E_2$, таких что $p_2 \circ F = f \circ p_1$, и для всякой точки $a \in B_2$ ограничение отображения F на слой $p_1^{-1}(a)$ первого расслоения над точкой a является линейным отображением этого слоя в слой $p_2^{-1}(f(a))$ второго расслоения над точкой $f(a)$. Изоморфизмом расслоений называется морфизм, для которого существует обратный.

Пример 1. Расслоение TS^1 изоморфно тривиальному расслоению $S^1 \times \mathbb{R}^1$. Изоморфизм сопоставляет вектору $v \in T_aS^1$ пару (a, x), где x — длина вектора v, взятая со знаком $+$, если v направлен против часовой стрелки, и $-$ в противном случае.

Пример 2. Расслоение TS^2 не изоморфно тривиальному расслоению $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Действительно, пусть $F : TS^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^2$ — изоморфизм расслоений. Тогда $\pi \circ F = p$, где $p : TS^2 \to S^2$ — отображение касательного расслоения, а $\pi : S^2 \times \mathbb{R}^2 \to S^2$ — проекция на первый сомножитель. Кроме того, ограничение F на слой над точкой $b \in S^2$ это линейное отображение $p^{-1}(b) \to \pi^{-1}(b)$. Рассмотрим в произвольной точке $b \in S^2$ вектор $F^{-1}(b, (1, 0)) \in T_bS^2$. Тем самым получено семейство векторов на сфере, где в каждой точке приложено по вектору, все векторы отличны от нуля и зависят от точки приложения непрерывно. По известной из топологии “лемме о причесывании ежа”, такого семейства векторов на S^2 не существует.

Пример 3. Если $F : M \to N$ — гладкое отображение многообразий, то F' является морфизмом касательных расслоений $TM \to TN$.

Сечением гладкого векторного расслоения $p : E \to B$ называется гладкое отображение $s : B \to E$ такое, что $p \circ s = \mathrm{Id}_B$. Иными словами, сечение это гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке b базы определенную точку слоя над этой точкой. Сечения векторного расслоения можно поточечно складывать и умножать на числа, причем число может гладко зависеть от точки базы — тем самым множество сечений векторного расслоения представляет собой модуль над алгеброй $C^\infty(B)$.

Сечение касательного расслоения многообразия M называется векторным полем на M. Пусть $X : M \to TM$ — векторное поле. Для каждой точки $a \in M$ определен касательный вектор $X(a) \in T_aM$, то есть линейный функционал $X(a) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$. Тем самым по векторному полю X и функции $f \in C^\infty(M)$ можно построить функцию $X(f)$, заданную равенством $X(f)(a) \stackrel{\text{def}}{=} (X(a)f)(a)$.

Теорема 1. *Построенное отображение $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ является дифференцированием алгебры гладких функций, то есть оно линейно и удовлетворяет равенству $X(fg) = fX(g) + X(f)g$. Любое дифференцирование алгебры гладких функций имеет вид $f \mapsto X(f)$ для некоторого векторного поля X.*

Доказательство. Как известно, функционал $X(a) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ линеен и удовлетворяет тождеству Лейбница $X(a)(fg) = f(a)X(a)(g) + X(a)(f)g(a)$. Из этого следует первая часть теоремы.

Пусть теперь $R : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ — дифференцирование, и пусть $a \in M$. Рассмотрим функционал $R_a : \mathfrak{m}_a \to \mathbb{R}$, заданный формулой $R_a(f) = R(f)(a)$. Функционал R_a линеен и удовлетворяет тождеству Лейбница. Отсюда следует, что если $f \in \mathfrak{m}_a^2$, то есть $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i\beta_i$, где $\alpha_i(a) = \beta_i(a) = 0$ для всех i, то $R_a(f) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(a)R_a(\beta_i) + R_a(\alpha_i)\beta_i(a) = 0$. Следовательно, R_a является элементом пространства $(\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2)^*$.

Зафиксируем систему координат (U, V, x) в окрестности точки a, и пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}$ — такая гладкая функция, что $f(b) = \varphi(x_1(b), \dots, x_n(b))$ для всех $b \in U$. Тогда, согласно теореме 1 лекции 4, существуют такие числа $v_1(a), \dots, v_n(a)$, что $R_a(f) = \sum_{i=1}^n v_i(a)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x(a))$. Определим теперь векторное поле $X : M \to TM$ равенством $X(a) = \sum_{i=1}^n v_i(a)\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ — тем самым, получим для всякого $a \in M$ равенство $R(f)(a) = (X(a)f)(a)$, что и требовалось. □

Тем самым множество векторных полей на многообразии M совпадает с множеством дифференцирований алгебры гладких функций на M. Обычно векторное поле и соответствующее дифференцирование обозначают одним и тем же символом.

Пусть теперь X, Y — два векторных поля на многообразии M. Рассмотрим оператор $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, заданный равенством $[X, Y] = YX - XY$.

Предложение 1. *Оператор $[X,Y]$ является дифференцированием, т.е. векторным полем на M.*

Доказательство. Линейность оператора $[X,Y]$ очевидна. Тождество Лейбница: $[X,Y](fg) = Y(X(f)g + fX(g)) - X(Y(f)g + fY(g)) = Y(X(f))g + X(f)Y(g) + Y(f)X(g) + fY(X(g)) - X(Y(f))g - Y(f)X(g) - X(f)Y(g) - fX(Y(g)) = [X,Y](f)g - f[X,Y](g)$. □

Предложение 2. *Операция взятия коммутатора определяет в множестве векторных полей на многообразии M структуру алгебры Ли. Иными словами, имеют место тождества $[Y,X] = -[X,Y]$ и $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.*

Доказательство — непосредственная проверка.

Пусть в (U, x) — система координат на многообразии M, причем $X(a) = \sum_{i=1}^n v_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, и $Y(a) = \sum_{i=1}^n w_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$ для всякой точки $a \in U$. Пусть X_i, Y_i — запись функций v_i, w_i в координатах, т.е. $v_i(a) = X_i(x_1(a), \dots, x_n(a))$ и $w_i(a) = Y_i(x_1(a), \dots, x_n(a))$. Тогда непосредственный подсчет показывает, что $[X,Y](a) = \sum_i Z_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}(a)$, где $Z_i(a) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x(a)) Y_j(x(a)) - X_j(x(a)) \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}(x(a)) \right)$.

Основным аналитическим результатом о векторных полях является следующая теорема, доказывать которую мы не будем:

Теорема (о локальной разрешимости дифференциального уравнения). *Пусть $X: M \to TM$ — векторное поле на многообразии M, и $a \in M$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$ и такое гладкое отображение $\gamma_a : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, что $\gamma_a(0) = a$ и для каждого числа $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ кривая $\gamma_a(t)$ представляет в точке τ вектор $X(\gamma_a(\tau)) \in T_{\gamma_a(\tau)} M$. Кривая γ_a единственна с точностью до изменения области определения $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Для всякого $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ точка $\gamma_a(t)$ гладко зависит от точки a.*

Кривая γ называет интегральной траекторией векторного поля X, проходящей через точку a.

Зафиксируем точку $a \in M$, достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и два числа $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Проведем через a интегральную траекторию γ_1 поля X. Затем через точку $\gamma_1(t)$ проведем интегральную траекторию γ_2 поля Y, затем через точку $\gamma_2(s)$ — интегральную траекторию γ_3 поля X, и, наконец, через точку $\gamma_3(-t)$ (обратите внимание на знак !) — интегральную траекторию γ_4 поля Y. Обозначим $\Phi(t,s)(a) = \gamma_4(-s)$; тем самым получилось отображение $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \times M \to M$. Из единственности интегральной траектории и ее непрерывной (в действительности гладкой) зависимости от начальной точки следует, что $\Phi(t,s)(a) \to a$ при $s \to 0$ и фиксированном t; поэтому для каждого t кривая $\delta_t(s) = \Phi(t,s)(a)$ принадлежит множеству Γ_a и представляет некоторый вектор $v(t) \in T_a M$

Теорема 2. $v'(0) = [X,Y](a)$.

Доказательство. Поскольку число ε достаточно мало, все вычисления происходят в малой окрестности точки $a \in M$. Можно считать, что эта окрестность отождествлена с открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$ посредством какой-нибудь системы координат. Тем самым можно просто считать, что $M = \mathbb{R}^n$, все касательные пространства $T_a\mathbb{R}^n$ также отождествлены с $\mathbb{R}^n$, и векторные поля X и Y задаются формулами $X(b) = (X_1(b), \dots, X_n(b))$ и $Y = (Y_1(b), \dots, Y_n(b))$ соответственно. Для простоты также предположим, что $a = 0$.

Имеем: $\gamma_1(t) = X(0)t + o(t)$; $\gamma_2(s) = \gamma_1(t) + Y(\gamma_1(t))s + o(s) = X(0)t + Y(0)s + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial x_j}(0) X_j(0) ts + o(t) + o(s)$, $\gamma_3(-t) = \gamma_2(s) - X(\gamma_2(s))t + o(t) = Y(0)s + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j}(0) X_j(0) - \frac{\partial X}{\partial x_j}(0) Y_j(0) \right) ts + o(t) + o(s)$, $\gamma_4(-s) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j}(0) X_j(0) - \frac{\partial X}{\partial x_j}(0) Y_j(0) \right) ts + o(t) + o(s)$. Отсюда следует, что $v(t) = t \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j}(0) X_j(0) - \frac{\partial X}{\partial x_j}(0) Y_j(0) \right) + o(t)$, и, следовательно, $v'(0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial x_j}(0) X_j(0) - \frac{\partial X}{\partial x_j}(0) Y_j(0) \right) = [X,Y](0)$. □