ЛЕКЦИЯ 7

Предложение 1. *Пусть X, Y — векторные поля на многообразии M, а $f \in C^\infty(M)$. Тогда $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$.*

Доказательство. Пусть $g \in C^\infty(M)$ — произвольная гладкая функция. Тогда в силу тождества Лейбница $[X, fY](g) = X(fY(g)) - fY(X(g)) = X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - fY(X(g)) = X(f)Y(g) + f[X, Y](g)$. $\square$

Пусть M — многообразие, на котором задан атлас $(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)$, а $p : E \to M$ — гладкое векторное расслоение ранга k с базой M. Тогда при $a \in U_\alpha \cap U_\beta$ задан линейный оператор $\Phi_{\beta\alpha}(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ такой, что при $v \in p^{-1}(a)$ выполнено равенство $y_\beta(v) = \Phi_{\beta\alpha}(a) y_\alpha(v)$ (где y — "векторные" координаты на многообразии E). Нетрудно видеть, что операторы Φ обладают такими свойствами ($E : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — единичный оператор):

(1) $\Phi_{\beta\alpha}(a)\Phi_{\alpha\beta}(a) = E$ для всех $a \in U_\alpha \cap U_\beta$.

(2) $\Phi_{\gamma\beta}(a)\Phi_{\beta\alpha}(a)\Phi_{\alpha\gamma}(a) = E$ для всех $a \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Пусть теперь задано только многообразие M, и для всякого $a \in U_\alpha \cap U_\beta$ определен оператор $\Phi_{\beta\alpha}(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ так, что вся совокупность этих операторов обладает свойствами 1 и 2. Тогда можно *построить* расслоение $p : E \to M$ ранга k, в котором операторы Φ будут функциями перехода. Это делается так: рассмотрим несвязное объединение $\tilde{E}$ всех множеств вида $\tilde{U}_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ — иными словами $\tilde{E} = \{(a, \alpha, v) \mid a \in U_\alpha, v \in \mathbb{R}^k\}$; индекс α используется, чтобы различать точки (a, α, v) и (a, β, v) даже если $a \in U_\alpha \cap U_\beta$. Введем на $\tilde{E}$ такое отношение эквивалентности: если $a \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $(a, \alpha, v) \sim (a, \beta, \Phi_{\beta\alpha}(a)v)$; множество классов эквивалентности обозначим E. Отображение $p : E \to M$ сопоставляет тройке (a, α, v) точку $a \in M$ — нетрудно видеть, что оно определено корректно. Пусть теперь $w \in E$, и $a = p(w) \in U_\alpha$; и пусть (a, α, v) — тройка, представляющая элемент w; здесь $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$. Тогда определим координаты точки w так: $x_\alpha(w) \stackrel{\text{def}}{=} x_\alpha(a)$ и $y_\alpha^{(i)}(w) = v_i$, где $i = 1, 2, \dots, k$. Нетрудно видеть, что действительно получилось расслоение ранга k, в котором операторы Φ выполняют роль функций перехода.

Пример 1. Пусть $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$, карты $U_1 = S^1 \setminus \{(0, 1)\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{(0, -1)\}$. Тогда $U_1 \cap U_2$ состоит из двух дуг, Γ_1 и Γ_2. Определим функцию $f : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ так: $f|_{\Gamma_1} = 1$ и $f|_{\Gamma_2} = -1$. В силу отсутствия тройных пересечений условия согласования 1 и 2 выполнены. Тем самым мы определили одномерное расслоение над S^1, тотальное пространство которого, как нетрудно видеть, гомеоморфно ленте Мебиуса (без края).

Пример 2. Аналогичный пример для $M = S^2$, карты U_1 — сфера без северного полюса, U_2 — сфера без южного полюса. Отображение перехода $f : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(2)$ устроено так: если (φ, ψ) — долгота и широта точки $a \in U_1 \cap U_2$, то $f(a)$ — поворот на угол $k\varphi$, где $k \in \mathbb{Z}$ — фиксированное заранее целое число. Полученное расслоение называется $\mathcal{O}(k)$. Нетрудно видеть, что расслоение $\mathcal{O}(0)$ тривиально, и расслоения $\mathcal{O}(k)$ и $\mathcal{O}(-k)$ изоморфны. Можно показать, что $\mathcal{O}(2)$ изоморфно касательному расслоению сферы.

Пусть теперь на многообразии M задано расслоение $p : E \to M$, в котором $\Phi_{\beta\alpha}(a)$ — функции перехода. Определим оператор $\Psi_{\beta\alpha}(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ равенством $\Psi_{\beta\alpha}(a) = \Phi_{\alpha\beta}(a)^* = ((\Phi_{\beta\alpha}(a))^{-1})^*$. Очевидно, совокупность операторов Ψ обладает свойствами 1 и 2 и, следовательно, является функциями перехода некоторого расслоения, которое называется сопряженным (двойственным) к E и обозначается E^*.

Предложение 2. *Слой расслоения E^* над точкой $a \in M$ — векторное пространство, двойственное к слою расслоения E над той же точкой.*

Доказательство. Пусть $U = (a, \alpha, u) \in E$, $V = (a, \alpha, v) \in E^*$; тогда положим по определению $\langle V, U \rangle = (v, u)$ (справа стоит стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$). Если при этом $U \sim (a, \beta, \Phi_{\beta\alpha}(a)u)$ и $V \sim (a, \beta, \Psi_{\beta\alpha}(a)v)$, то $\langle V, U \rangle = (\Phi_{\beta\alpha}(a)u, \Psi_{\beta\alpha}(a)v) = (u, A_{\beta\alpha}(a)^* B_{\beta\alpha}(a)) = (u, v)$. $\square$

Таким образом, если имеется сечение s расслоения E и сечение σ двойственного расслоения, то в каждой точке $a \in M$ определено число $\langle \sigma(a), s(a) \rangle$ — то есть, $\langle \sigma, s \rangle$ является гладкой функцией на многообразии M.

Расслоение, двойственное к касательному, называется кокасательным и обозначается T^*M. Слой T_a^*M расслоения T^*M над точкой $a \in M$, как следует из утверждения 2, можно отождествить с векторным пространством $\mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2$. Если в окрестности точки a фиксирована карта (U, x), то в пространстве T_a^*M имеется выделенный базис, двойственный к базису $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)$. Элементы этого базиса представляются функциями $f_1(b) = x_1(b) - x_1(a), \dots, f_n(b) = x_n(b) - x_n(a)$ и обозначаются $dx_1(a), \dots, dx_n(a)$.

Элементы пространства T_a^*M называются ковекторами (в точке a), а сечения расслоения T^*M — 1-формами на на многообразии M. В координатах всякая 1-форма имеет вид $\nu(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$.