ЛЕКЦИЯ 8

Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий размерности m и n соответственно. Тогда для всякой точки $a \in M$ имеется линейное отображение $f'(a) : T_aM \to T_bN$ (где $b = f(a)$) и сопряженное к нему отображение $(f'(a))^* : T_b^*N \to T_a^*M$. Пусть теперь на многообразии N задана 1-форма ν. Тогда для всякой точки $a \in M$ мы можем рассмотреть ковектор $\mu(a) = (f'(a))^*(\nu(f(a))$; тем самым на многообразии M определена 1-форма μ — *обратный образ* формы ν; она обозначается $\mu = f^*\nu$.

Фиксируем системы координат (U, x), (V, y) в окрестности точек a и b на многообразиях M и N соответственно. Пусть 1-форма ν на N в координатах выглядит как $\nu(q) = \sum_{i=1}^n \nu_i(y_1(q), \dots, y_n(q))dy_i(q)$, а отображение f задается набором функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ таких, что $y_i(f(p)) = \varphi_i(x_1(p), \dots, x_m(p))$. Тогда матрица линейного отображения $(f'(a))^* : T_b^*N \to T_a^*M$ в базисах $dx_1(a), \dots, dx_m(a)$ и $dy_1(b), \dots, dy_n(b)$ равна $\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x(a))\right)$, откуда следует, что значение 1-формы $f^*\nu$ в точке $p \in U \subset M$ равно
$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \nu_i(\varphi_1(x(p)), \dots, \varphi_n(x(p)))\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x(p))\, dx_j(p)$.

Отождествим теперь пространство T_a^*M с фактором $\mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2$.

Теорема 1. *Для всякой 1-формы ν на многообразии M имеется гладкая функция $f : M\times M \to \mathbb{R}$ такая, что $f(b, a) = -f(a, b)$, и для всякого $a \in M$ функция $\varphi_a(b) \overset{def}{=} f(a, b)$ принадлежит идеалу $\mathfrak{m}_a$ и представляет элемент $\nu(a) \in \mathfrak{m}_a \,/\, \mathfrak{m}_a^2$.*

Мы не будем доказывать эту теорему. Если в окрестности точки $a \in M$ фиксирована карта (U, x), и $\varphi(x, y)$ — координатная запись функции f (то есть $f(p, q) = \varphi(x(p), x(q))$ при $p, q \in U$), то $\nu(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(x(a), x(a))\, dx_i(a)$.

Пусть ν — 1-форма на M, а $f : M \times M \to \mathbb{R}$ — представляющая ее функция. Очевидно, $f(a, a) = 0$ в силу косой симметрии; при этом $\nu(a) = 0$, если функция $\varphi_a(b) = f(a, b)$ принадлежит $\mathfrak{m}_a^2$, то есть (в силу леммы Адамара) если $f(a, b) = o(x(b) - x(a))$ при $b \to a$ (x — произвольные координаты). Таким образом, из теоремы 1 вытекает, что множество 1-форм на M есть факторпространства множества $\Lambda_2(M)$ кососимметрических функций на $M \times M$ по подпространству $\Lambda_2^0(M)$, состоящему из функций, “касающихся нуля на диагонали”, т.е. таких, что $f(a, b) = o(x(b) - x(a))$ при $b \to a$ и произвольном a.

Нетрудно видеть, что если $F : M \to N$ — гладкое отображение, и ν — 1-форма на N, представленная кососимметрической функцией $f : N \times N \to \mathbb{R}$, то в качестве представителя 1-формы $f^*\nu$ можно взять функцию $h : M \times M \to M$, заданную формулой $h(p, q) = f(F(p), F(q))$.

Пусть теперь $g : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Определим кососимметрическую функцию $f : M \times M \to \mathbb{R}$ равенством $f(a, b) = g(b)-g(a)$. 1-форма, представляемая функцией f, называется дифференциалом функции g и обозначается dg. Если $g(p) = \alpha(x(p))$ в некоторой системе координат, то $dg(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}(x(p))\, dx_i(p)$. В частности, если $g = x_i$ — координатная функция, то $dg = dx_i$, так что обозначения согласованы. Нетрудно также видеть, что если $F : M \to N$ — гладкое отображение, то $F^*dg = d(F^*g)$, где символом F^*g обозначена функция $g \circ F : M \to \mathbb{R}$.

Предложение. *Для всякого векторного поля X и всякой гладкой функции g на многообразии M выполнено равенство $\langle dg, X\rangle = X(g)$.*

Доказательство. В произвольных координатах x в окрестности U точки a имеем: $g(p) = G(x(p))$, где $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Также $X(p) = \sum_{i=1}^n A_i(x(p))\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ для некоторых функций $A_1, \dots, A_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда $dg(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i}(x(p))\, dx_i(p)$, и $\langle dg, X\rangle(p) = \sum_{i=1}^n A_i(x(p))\frac{\partial G}{\partial x_i}(x(p)) = X(g)(p)$. □

Пример 1. Не всякая 1-форма является дифференциалом функции. Действительно, если $\nu = dg$, то $\nu(x) = \sum_{i=1}^n \nu_i(x)\, dx_i$, где $\nu_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ в произвольных координатах x на многообразии. Отсюда вытекает условие $\frac{\partial\nu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j\partial x_i}\frac{\partial\nu_j}{\partial x_i}$, которое должно быть выполнено при всяком x. Если теперь, например, $M = \mathbb{R}^2$, и $\nu(x_1, x_2) = x_2dx_1 - x_1dx_2$, то $\frac{\partial\nu_1}{\partial x_2} = 1 \neq -1 = \frac{\partial\nu_2}{\partial x_1}$.

Таким образом, имеется “аналитическое” препятствие к тому, чтобы 1-форма ν являлась дифференциалом функции.

Пример 2. Вот пример более “тонкого” препятствия к тому, чтобы 1-форма была дифференциалом функции. Пусть $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Определим функцию $f(a, b) = \sin \ell(a, b)$, где $\ell(a, b)$ — длина дуги между точками a и b, взятую со знаком $+$, если a предшествует b по часовой стрелке, и со знаком $-$ в противном случае (неоднозначность выбора дуги не играет роли, поскольку синус — периодическая функция). Эта форма тоже не является дифференциалом функции. Для доказательства рассмотрим на окружности атлас из двух карт U_1, U_2, координата в которых — центральный угол φ, изменяющийся в интервале $(-\pi, \pi)$ и отсчитываемый (против часовой стрелки) в карте U_1 — от точки $(1,0)$, а в карте U_2 — от точки $(-1,0)$. Отображения перехода здесь $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi$ на верхней полуокружности (то есть при $\varphi_1 > 0$) и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ на нижней (то есть при $\varphi_1 < 0$).

Нетрудно видеть, что 1-форма, представляемая функцией f, записывается в координатах как $d\varphi_1 = d\varphi_2$ (в обеих картах). Пусть теперь $\nu = dg$. Тогда $g(p) = \alpha(\varphi_1(p)) = \beta(\varphi_2(p))$, причем $\beta(\varphi) = \alpha(\varphi \pm \pi)$ (знак $+$ для $\varphi < 0$ и $-$ для $\varphi > 0$). Из формулы Тейлора следует, что $\alpha'(\varphi) = \beta'(\varphi) = 1$ при всяком φ, откуда вытекает, что функции α и β монотонно возрастают. Пусть точка p лежит в верхней полуокружности, а точка q в нижней. Тогда $\varphi_1(p) > \varphi_1(q)$, откуда $g(p) = \alpha(\varphi_1(p)) > \alpha(\varphi_1(q)) = g(q)$. С другой стороны, $\varphi_2(q) > \varphi_2(p)$, откуда $g(q) = \beta(\varphi_2(q)) > \beta(\varphi_2(p)) = g(p)$ — противоречие.

Пусть $p : E \to M$ — гладкое векторное расслоение ранга k, причем на базе M фиксирован атлас (U_α, x_α), и для всякого $a \in U_\alpha \cap U_\beta$ имеется отображение перехода $\Phi_{\alpha\beta}(a) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Отображение перехода обратимо, поэтому его определитель (в произвольном базисе) отличен от нуля. Говорят, что атлас (U_α, x_α) и отображения перехода $\Phi_{\alpha\beta}(a)$ задают ориентацию расслоения $p : E \to B$, если этот определитель для всех α, β, a положителен. Расслоение называется ориентируемым, если такой атлас существует. Многообразие M называется ориентируемым, если ориентируемо его касательное расслоение.

Пример 3. Сфера S^n ориентируема. Для доказательства нужно рассмотреть стандартный атлас из двух карт $U_1 = S^n \setminus \{\mathcal{N}\}$, $U_2 = S^n \setminus \{\mathcal{S}\}$ и координаты x, y, заданные стереографической проекцией, соответственно, из северного и южного полюса. Если $x_i(a) = \varphi_i(y_1(a), \dots, y_n(a))$, то отображение перехода для касательного расслоения в точке a имеет в базисах $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_y}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(a)$ матрицу $\Phi(a) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y(a))\right)$. Определитель $\det \Phi(a)$ непрерывно зависит от точки a и нигде не обращается в нуль — следовательно, он во всех точках имеет один и тот же знак (это рассуждение не проходит при $n = 1$, когда пересечение $U_1 \cap U_2$ состоит из двух кусков — разберитесь в этом !). Если этот знак положителен, то ориентируемость доказана; если отрицателен, то достаточно изменить координаты в карте U_2, положив $z_1(a) = -y_1(a)$, и $z_i(a) = y_i(a)$ при всех $i > 1$.

Пример 4. Лента Мебиуса M — неориентируемое многообразие. Стандартный атлас на M состоит из двух карт $(U_1, (x_1, y_1))$ и $(U_2, (x_2, y_2))$, при этом $V_1 = V_2 = (0,1) \times (0,1)$. Пересечение карт $U_1 \cap U_2$ состоит из двух кусков, Γ_1 и Γ_2. На Γ_1 отображение перехода φ_{12} тривиально, а на Γ_2 оно равно $\varphi_{12}(x, y) = (x, -y)$. Пусть теперь U_α — ориентированный атлас на M. Поскольку это атлас, эквивалентный исходному (мы рассматриваем ту же самую структуру многообразия на M !), мы можем добавить к нему U_1 и U_2 так, что снова получится атлас (разумеется, он перестанет быть ориентированным). Как обычно, обозначим $\Phi_{\alpha\beta}(a)$ отображение перехода в точке $a \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Поскольку карта U_1 линейно связна, определитель $\det \Phi_{\alpha 1}(a)$ имеет один и тот же знак при всех α и при всех $a \in U_\alpha \cap U_1$. То же самое верно для $\det \Phi_{\alpha 2}(a)$. Но тогда знак определителя $\det \Phi_{12}(a) = \det \Phi_{\alpha 1}(a) / \det \Phi_{\alpha 2}(a)$ также не зависит от точки a, что неверно: на Γ_1 знак положителен, а на Γ_2 отрицателен.