ЛЕКЦИЯ 9

Пусть M — ориентированное компактное многообразие размерности 1, на котором задан атлас (U_α, x_α). *Разбиением* многообразия M называется конечная последовательность $\mathcal{T}$ кривых $\gamma_n : [0,1] \to M$, $n = 1, 2, \dots, N$ такая, что 1) через каждую точку многообразия проходит ровно одна кривая, за исключением конечных точек $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$, где две кривые с соседними номерами пересекаются, 2) каждая кривая γ_i лежит в пределах одной карты (U_i, x_i), 3) $x_i(\gamma_i(t))$ — возрастающая функция t. Нетрудно видеть, что последнее условие не зависит от выбора карты, поскольку атлас ориентированный. На всяком компактном одномерном многообразии существует разбиение; это верно также и для многообразий с краем.

Будем говорить, что последовательность разбиений $\mathcal{T}_n = \{\gamma_k^{(n)}\}$ бесконечно уплотняется, если для произвольной карты (U, x) имеет место равенство $\max_k \bigl(x(\gamma_k^{(n)}(1)) - x(\gamma_k^{(n)}(0))\bigr) \to 0$ при $n \to \infty$; максимум здесь берется по всем k таким, что кривая $\gamma_k^{(n)}$ целиком лежит в карте U.

Пусть ν — 1-форма на M, представленная кососимметрической функцией $f : M \times M \to \mathbb{R}$. Число A называется интегралом Римана от формы ν по многообразию M (обозначение $A = \int_M \nu$), если для всякой бесконечно уплотняющейся последовательности разбиений $\mathcal{T}_n$ числовая последовательность $I(\nu, \mathcal{T}_n) = \sum_k f(\gamma_k^{(n)}(0), \gamma_k^{(n)}(1))$ стремится к A при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Определение интеграла от 1-формы корректно, т.е. не зависит от выбора функции f, представляющей форму ν. Интеграл от 1-формы по ориентированному одномерному многообразию существует и единствен.*

Доказательство. Пусть $g : M \times M \to \mathbb{R}$ — другая кососимметрическая функция, представляющая 1-форму ν. Из формулы Тейлора следует, что для произвольной системы координат (U, x) имеет место равенство $f(a,b) - g(a,b) = o(x(b) - x(a))$, или $(f(a,b) - g(a,b))/(x(b) - x(a)) \to 0$ при $b \to a$, причем сходимость равномерна по $a \in U$. Поскольку многообразие M компактно, можно покрыть его конечным множеством карт U_i, и тогда сходимость будет равномерной по всему многообразию. Иными словами, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого i если $a, b \in U_i$ и $|x_i(b) - x_i(a)| < \delta$, то $|f(a,b) - g(a,b)| < \varepsilon\, |x_i(b) - x_i(a)|$. Если число n достаточно велико, для разбиения $\mathcal{T}_n$ имеет место неравенство $\bigl(x(\gamma_k^{(n)}(1)) - x(\gamma_k^{(n)}(0))\bigr) < \delta$ для всех k и для произвольной координаты $x = x_i$. Следовательно, $|I(f, \mathcal{T}_n) - I(g, \mathcal{T}_n)| < \varepsilon$. Корректность доказана.

Существование и единственность интеграла от формы доказывается так же, как интегрируемость непрерывной функции на отрезке (см. ниже теорему 2). А именно, функция f на компактном множестве $M \times M$ удовлетворяет равномерной формуле Тейлора порядка 2. Из нее следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого i и для любых трех точек $a, b, c \in U_i$ таких, что $|x_i(a) - x_i(b)| < \delta$, $|x_i(b) - x_i(c)| < \delta$, имеет место неравенство $|f(a,c) - f(a,b) - f(b,c)| < \varepsilon\, |x_i(c) - x_i(a)|$. Отсюда вытекает, что последовательность интегральных сумм $I(f, \mathcal{T}_n)$ удовлетворяет условию Коши: если $\max_k \bigl(x(\gamma_k^{(m)}(1)) - x(\gamma_k^{(m)}(0))\bigr) < \delta$, $\max_k \bigl(x(\gamma_k^{(n)}(1)) - x(\gamma_k^{(n)}(0))\bigr) < \delta$, то $|I(f, \mathcal{T}_m) - I(f, \mathcal{T}_n)| < \varepsilon$ — следовательно, предел $A = \int_M \nu$ существует и единствен. □

Теорема 2. *Пусть $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$, и пусть $\nu = u(x)\, dx$, где x — стандартная координата на M. Тогда $\int_M \nu = \int_a^b u(x)\, dx$.*

Доказательство. В качестве функции, представляющей ν, можно взять $f(x,y) = \frac{1}{2}(u(x) + u(y))(y - x)$. □

Следствие (формула замены переменной в интеграле). *Пусть $h : [a,b] \to [a,b]$ — гладкая возрастающая функция. Тогда $\int_a^b u(x)\, dx = \int_a^b u(h(y)) h'(y)\, dy$.*

Доказательство. Рассмотрим новую координату $y = h^{-1}(x)$ на многообразии с краем $[a,b]$; тогда $x = h(y)$, и форма ν задается формулой $\nu = u(h(y)) h'(y)\, dy$. Осталось применить теорему 2. □

Интеграл от 1-формы по одномерному многообразию обладает ожидаемыми свойствами интеграла:

Теорема 3. *Пусть M — компактное одномерное многообразие (с краем или без края), и ν — 1-форма на нем. Тогда*

(1) *Величина $\int_M \nu$ зависит от ν линейно.*
(2) *Если $M = M_1 \cap M_2$, где $M_1, M_2 \subset M$ — компактные подмногообразия (также, возможно, с краем), и $M_1 \cap M_2$ состоит из конечного числа точек. Тогда $\int_M \nu = \int_{M_1} \nu + \int_{M_2} \nu$.*

Доказательство не отличается от доказательства соответствующих теорем про интеграл от функции по отрезку.

Пусть $h : M \to N$ — диффеоморфизм ориентированных одномерных компактных многообразий. Будем говорить, что h сохраняет ориентацию, если для всяких двух карт (U, x), (W, y) на M и N соответственно, согласованных с ориентацией и таких, что $a \in U$, $h(a) \in W$, имеет место равенство $h'(a)\frac{\partial}{\partial x}(a) = \alpha\frac{\partial}{\partial y}(h(a))$, где $\alpha > 0$. Если $\alpha < 0$, то говорят, что диффеоморфизм меняет ориентацию.

Теорема 4. *Пусть ν — 1-форма на N, и $h : M \to N$ — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Тогда $\int_M h^*\nu = \int_N \nu$. Если диффеоморфизм меняет ориентацию, то $\int_M h^*\nu = -\int_N \nu$.*

Доказательство. Пусть $f : N \times N \to \mathbb{R}$ — кососимметрическая функция, представляющая форму ν, а $\mathcal{T}_n = \{\gamma_i^{(n)}\}$ — разбиение многообразия N. Тогда функция $g : M \times M \to \mathbb{R}$, заданная формулой $g(a, b) = f(h(a), h(b))$, представляет форму $h^*\nu$, а совокупность кривых $\widetilde{\mathcal{T}}_n = \{h^{-1} \circ \gamma_i^{(n)}\}$ является разбиением многообразия M (поскольку h^{-1}, как и h, сохраняет ориентацию). Отображение h^{-1} равномерно непрерывно, поэтому если последовательность разбиений $\mathcal{T}_n$ бесконечно измельчается, то то же самое верно и для $\widetilde{\mathcal{T}}_n$. Теорема теперь следует из равенства $I(g, \widetilde{\mathcal{T}}_n) = I(f, \mathcal{T}_n)$.

В случае, когда h меняет ориентацию, доказательство аналогично. □

Если M — ориентированное многообразие с краем, то его край состоит из конечного количества точек. На этих точках можно расставить знаки $+$ и $-$ следующим образом. Пусть $a \in \partial M$ — точка края, и пусть (U, V, x) — карта, согласованная с ориентацией и такая, что $a \in U$, $x(a) = 0$. Тогда $V \subset \mathbb{R}$ представляет собой полуинтервал. Если этот полуинтервал имеет вид $[0, \varepsilon)$, то припишем точке a знак $-$ (обозначение $a \in \partial_- M$), а если $(-\varepsilon, 0]$, то знак $+$ (обозначение $a \in \partial_+ M$).

Теорема 5 (формула Ньютона–Лейбница). *Если $\nu = dg$, где $g \in C^\infty(M)$, то $\int_M \nu = \sum_{a\in\partial_+ M} g(a) - \sum_{a\in\partial_- M} g(a)$. В частности, если M — многообразие без края, то $\int_M dg = 0$.*

Доказательство. Согласно теореме 3 достаточно рассмотреть случай, когда M линейно связно. Нетрудно видеть, что в этом случае край M либо пуст, либо состоит из двух точек $a \in \partial_- M$, $b \in \partial_+ M$. В случае, когда край непуст, M диффеоморфно отрезку $[a, b]$. Тогда в качестве разбиения $\mathcal{T}_n$ можно взять разбиение отрезка на n равных частей, и тогда $\int_{[a,b]} dg = (g(t_1) - g(t_0)) + (g(t_2) - g(t_1)) + \cdots + (g(t_{n+1}) - g(t_n)) = g(t_{n+1}) - g(t_0) = g(b) - g(a)$. Если край пуст, то M диффеоморфно окружности S^1, и доказательство аналогично. □