ЭКЗАМЕН 16 МАЯ 2004 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

(1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия, имя и отчество сдающего экзамен,* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО****.*

(2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Задача 1. X — векторное поле на многообразии M, ν — 1-форма на нем, $f, g : M \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем g нигде не обращается в нуль. Докажите формулу $\langle \nu, [fX, gX] \rangle = \langle \nu, X \rangle \langle g^2 d\left(\frac{f}{g}\right), X \rangle$.

Задача 2. Шарнирный механизм состоит из стержней AB, BC, CD и DE. Точки A и E закреплены, а остальные точки могут свободно двигаться по плоскости. Длина каждого стержня равна 1 (и не меняется при движении — стержень жесткий), а расстояние между точками A и E равно 3. Введите структуру гладкого многообразия (то есть опишите карты, координаты и отображения перехода) в пространстве возможных положений механизма.

Задача 3. На многообразии $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ действует группа G, состоящая из всех поворотов вокруг начала координат, всех растяжений-сжатий к началу координат, и их композиций. 1-форма ν называется инвариантной относительно группы G, если $g^*\nu = \nu$ для всех $g \in G$. Найдите размерность а) пространства 1-форм, инвариантных относительно G, б) пространства замкнутых 1-форм, инвариантных относительно G.

Задача 4. Элементами пространства E являются всевозможные пары (ℓ, v), где $\ell \subset \mathbb{R}^3$ — прямая, проходящая через начало координат, а v — вектор в $\mathbb{R}^3$, перпендикулярный прямой ℓ. Отображение $p : E \to \mathbb{R}P^2$ действует по правилу $p(\ell, v) = \ell$. а) Докажите, что тройка $(E, \mathbb{R}P^2, p)$ представляет собой гладкое векторное расслоение ранга 2. б) Задайте в этом отображении карты и функции перехода. в) Ориентируемо ли это расслоение ?

Задача 5. Многообразие M состоит из всевозможных упорядоченных троек (A_1, A_2, A_3) попарно различных точек на окружности S^1. Приведите пример замкнутой, но не точной 1-формы на M.