ЭКЗАМЕН 19 СЕНТЯБРЯ 2004 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

(1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана* **ФАМИЛИЯ, ИМЯ И ОТЧЕСТВО** *сдающего экзамен,* **И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО**.

(2) *Решение каждого пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^k$, на котором заданы два различных действия группы $G = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$: одно $A_\varphi([z_0 : z_1 : \dots : z_k]) = [z_0 : z_1 e^{i\varphi} : \dots : z_k e^{ki\varphi}]$ и другое $B_\varphi([z_0 : z_1 : \dots : z_k]) = [(z_0 e^{i\varphi} + z_1(1 - e^{i\varphi})) : z_1 : \dots : z_k]$. Рассмотрим также множество $E \subset \mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}^{k+1}$, состоящее из всех пар $([z_0 : z_1 : \dots : z_k], (v_0, v_1 \dots, v_k))$ таких, что $z_0^2 v_0 + z_1^2 v_1 + \dots + z_k^2 v_k = 0$.

Кто боится больших размерностей, может считать, что $k = 1$.

1. Докажите, что E является гладким подмногообразием в $\mathbb{C}P^k \times \mathbb{C}^{k+1}$, а тройка $(E, \mathbb{C}P^k, p)$, где p — проекция на первый сомножитель, представляет собой гладкое векторное расслоение. Укажите все размерности и ранги.

2. Найдите неподвижные точки преобразования A_φ. При $\varphi = \pi/2$ для одной из них (выберите сами; обозначим ее a) задайте какой-нибудь базис в пространстве $T_a\mathbb{C}P^k$ и вычислите в этом базисе матрицу оператора $A'_{\pi/2}(a)$.

Пусть X и Y — векторные поля на $\mathbb{C}P^k$, для которых кривые $\alpha(\varphi) = A_\varphi(z)$ и, соответственно, $\beta(\varphi) = B_\varphi(z)$ (при всевозможных $z \in \mathbb{C}P^k$) являются интегральными траекториями.

3. Равен ли коммутатор $[X, Y]$ нулю тождественно ? Если нет, то найдите все точки $z \in \mathbb{C}P^k$, в которых $[X, Y](z) = 0$.

Рассмотрим на $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ комплекснозначную дифференциальную 1-форму $\nu = \frac{\bar{z}_0\, dz_1}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_k|^2}$. Пусть $f : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\} \to \mathbb{C}P^k$ — стандартная проекция: $f(z_0, z_1, \dots, z_k) = [z_0 : z_1 : \dots : z_k]$.

4. Докажите, что на $\mathbb{C}P^k$ существует и единственна дифференциальная 1-форма ω такая, что $\nu = f^*\omega$.

5. Вычислите значение $\langle \omega(z), X(z) \rangle$ в произвольной точке $z = [z_0 : z_1 : \dots : z_k] \in \mathbb{C}P^k$.

6. Вычислите $\int_0^{2\pi} \gamma^*\omega$, где $\gamma(\varphi) = [1 : e^{i\varphi} : \dots : e^{ki\varphi}]$.

7. Является ли форма ω замкнутой ?