ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

В задачах 1–9 опишите структуру многообразия (с краем или без края) на соответствующих множествах. Нужно, чтобы построенная структура задавала на множестве естественную топологию. Если приведена пара (множество, подмножество), то требуется выяснить, является ли подмножество подмногообразием.

Задача 1. $S^{n-1} \subset S^n$. Сфера S^n это стандартная единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат, а S^{n-1} есть пересечение S^n с n-мерным линейным подпространством в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Задача 2. $\mathbb{R}P^n$ (рассматриваемое как множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат).

Указание. Каждой точке $a \in \mathbb{R}P^n$ соответствует система однородных координат $[a_0 : \cdots : a_n]$).

Задача 3. Лента Мебиуса, заданная как результат отождествления в прямоугольнике $[0,1] \times [0,1]$ точек по такому правилу: $(0,t) \sim (1, 1-t)\, \forall t \in [0,1]$.

Задача 4. Множество всех прямых на плоскости (не обязательно проходящих через начало координат). Докажите, что это многообразие диффеоморфно ленте Мебиуса, из которой удалили край.

Задача 5. $\mathbb{C}P^n$.

Задача 6. Сфера с g ручками. Это результат склеивания (без перекрутки) сторон правильного $4g$-угольника, где сторона номер $4k$ склеивается со стороной номер $4k+2$, а $4k+1$ с $4k+3$, для всех $k = 1, \ldots, g$. Что будет, если склеивать с перекруткой ?

Задача 7. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

Указание. Можно воспользоваться задачей 10. Тем не менее, полезно построить на $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ явные координаты.

Задача 8. $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

Задача 9. $\mathrm{G}(n, k)$ — множество k-мерных линейный подпространств в $\mathbb{R}^n$. (Результат называется многообразием Грассмана.)

Задача 10. Докажите (воспользовавшись теоремой о неявной функции), что если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и на множестве $M = \{a \in M \mid f(a) = 0\}$ нет точек, в которых все частные производные обращаются в нуль одновременно, то множество M является подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности $n-1$.

Задача 11. Докажите, что подмногообразие является замкнутым подмножеством.

Задача 12. Докажите, что на S^1 имеется единственная структура одномерного многообразия.