КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Задача 1. Постройте изоморфизм между 1) пространством $T_E\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ и множеством матриц $\mathrm{Mat}(n\times n)$; здесь $E\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ — единичная матрица; 2) пространством $T_A\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ и множеством $\mathrm{Mat}(n\times n)$; здесь $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ — произвольная обратимая матрица; 3) пространством $T_E\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ и множеством $\{X\in\mathrm{Mat}(n\times n)\mid \mathrm{Tr}(X)=0\}$; 4) пространством $T_A\,\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ и множеством $\{X\in\mathrm{Mat}(n\times n)\mid \mathrm{Tr}(A^{-1}X)=0\}$.

Задача 2. Предложите описания, аналогичные описаниям задачи 2, для касательных пространств T_EG и T_AG, где G — следующие матричные группы: 1) $G=\mathrm{O}(n)$ — ортогональные матрицы; 2) $G=\mathrm{U}(n)$ — унитарные матрицы; 3) $G=\mathrm{SU}(n)$ — унитарные матрицы с определителем 1.

Задача 3. 1) Эллипс $M\subset\mathbb{R}^2$ задан уравнением $x^2/a+y^2/b=1$, где $a,b>0$. Для произвольной точки $q\in M$ найдите касательное пространство T_qM как подпространство в $\mathbb{R}^2$. 2) Решите аналогичную задачу в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной уравнением $x^2+y^3+z^5=1$. 3) То же самое для гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$, заданной уравнением $F(x)=0$, где F — некоторая гладкая функция. 4) То же самое для кривой в $\mathbb{R}^3$, заданной как пересечение сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и эллипсоида $x^2/a+y^2/b+z^2/c=1$, $a,b,c>0$.

Задача 4. Рассмотрим отображение $f:\mathbb{R}P^2\dashrightarrow\mathbb{R}P^2$, заданное формулой $(x_0:x_1:x_2)\mapsto(x_1x_2:x_0x_2:x_0x_1)$ (стрелка пунктирная, поскольку в некоторых точках это отображение не определено — выясните, где именно!). Найдите ранг производной $f'(a)$ в тех точках, где отображение $f(a)$ определено. Постарайтесь обойтись минимумом явных вычислений.

Задача 5. Докажите, что касательное пространство к многообразию Грассмана $\mathrm{G}(n,k)$ в точке $A\subset\mathbb{R}^n$ изоморфно множеству линейных отображений $A\to\mathbb{R}^n/A$. Введите в указанном множестве линейных отображений базис $v_1,\dots,v_N$, и опишите координаты $x_1,\dots,x_N$ на многообразии $\mathrm{G}(n,k)$, для которых $v_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,v_M=\frac{\partial}{\partial x_N}$; здесь N — размерность многообразия Грассмана.

Задача 6. Многообразие полных флагов в $\mathbb{R}^n$ состоит из всех цепочек подпространств $V_1\subset V_2\subset\dots\subset V_{n-1}\subset\mathbb{R}^n$, где $\dim V_k=k$. Докажите, что касательное пространство к многообразию флагов изоморфно множеству верхнетреугольных матриц $n\times n$ с нулями на диагонали. Введите в многообразии флагов координаты $x_1,\dots,x_N$ такие, чтобы векторы $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}$ образовывали естественный базис в пространстве верхнетреугольных матриц, состоящий из "матричных единиц" (матриц, у которых один элемент равен 1, а остальные 0).

Задача 7. Даны многообразия M и N и гладкое отображение $f:M\to N$. Введите в многообразиях M и N координаты x, y, и для каждой точки $a\in M$ найдите матрицу оператора $f'(a):T_aM\to T_{f(a)}N$ в базисах $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, а также найдите ранг этого оператора. 1) $M=S^n$, $N=\mathbb{R}^{n+1}$, f — вложение в качестве единичной сферы; 2) $M=S^n$, $N=\mathbb{R}^n$, f — ортогональная проекция единичной сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$ на координатную гиперплоскость; 3) $M=S^n$, $N=S^n$, f — отображение, сопоставляющее каждой точке сферы противоположную; 4) $M=\mathbb{R}P^k$, $N=\mathbb{R}P^n$, $k<n$; f — стандартное вложение; 5) $M=N=\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, f — умножение слева на матрицу A; 6) $M=N=\mathrm{O}(n)$, f — обращение матрицы.