ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ И РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Теорема о неявной функции: если $F : M \to N$ — гладкое отображение многообразий размерностей m и n соответствиенно, причем $F(a) = b$ и $\operatorname{Rk} F'(a) = n$, то для некоторой окрестности $U \subset M$ точки a на множестве $U \cap F^{-1}(b) \subset M$ существует естественная структура подмногообразия (в U) размерности $m-n$. Точнее, пусть x, y — системы координат на M и N в окрестности точек a и b соответственно, и $y_i(F(q)) = \varphi_i(x_1(q), \dots, x_m(q))$. Тогда матрица оператора $F'(a)$ есть $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x(a))\right)$; пусть от нуля отличен ее минор, соответствуюший столбцам $i_1, \dots, i_n$. Тогда систему координат на $U \cap F^{-1}(b)$ составляют ограничения на это множество координат $x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-n}}$, где $\{j_1, \dots, j_{m-n}\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$.

Задача 1. а) При каких условиях на функцию $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ множество ее нулей $M_Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) = 0\}$ является подмногообразием в $\mathbb{R}^2$? Чему M_Q диффеоморфно при различных Q ? Чему диффеоморфно замыкание M_Q в $\mathbb{R}P^2$? б) Решите ту же задачу для множества $E_P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = P_3(x)\}$, где $P_3(x)$ – многочлен степени 3 с действительными коэффициентами. в) Та же задача для множества $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_1^2/a_1^2 + \dots + x_n^2/a_n^2 = 1\}$. г) Та же задача для множества $M_a = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum x_i^2 = 1,\ \sum x_i^3 = a\}$.

Задача 2. Докажите, что следующие многообразия диффеоморфны:

(1) $\mathbb{R}P^1$ и S^1;
(2) $\mathbb{C}P^1$ и S^2;
(3) $\mathbb{C}^n$ и пространство неупорядоченных наборов из n не обязательно различных комплексных чисел;
(4) $\mathbb{C}P^n$ и пространство неупорядоченных наборов из n точек $\mathbb{C}P^1$ (в частности, $S^2 \times S^2 / \big((x,y) \sim (y,x)\big)$ и $\mathbb{C}P^2$).
(5) $S^2 \times S^2$ и множество, заданное в однородных координатах $(x : y : z : t)$ пространства $\mathbb{C}P^3$ уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$;
(6) Пространство неупорядоченных наборов из n точек $\mathbb{R}P^2$ и $\mathbb{R}P^{2n}$;
(7) $\mathbb{C}P^2 / \big([x : y : z] \sim [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]\big)$ и S^4;
(8) $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 / \big(([x_1 : y_1], [x_2 : y_2]) \sim ([\overline{x_1} : \overline{y_1}], [\overline{x_2} : \overline{y_2}])\big)$ и S^4.