КОММУТАТОР ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ. РАССЛОЕНИЯ.

Задача 1. Для векторных полей X и Y на $\mathbb{R}^2$ вычислите коммутатор, интегральные траектории, и опишите сдвиг вдоль интегральной траектории за время t: 1) $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $Y = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$; 2) $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Задача 2. Векторное поле X на сфере S^2 направлено по параллелям, поле Y направлено по меридианам, и длина векторов $X(a)$ и $Y(a)$ равна $\cos\psi(a)$, где ψ — широта. Вычислите коммутатор $[X,Y]$.

Задача 3. Докажите, что касательное расслоение к многообразию 1) $\mathbb{T}^2$, 2) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, 3) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ тривиально.

Указание. См. задачу 1 листка “Касательные пространства”.

Задача 4. Для произвольной матрицы $P \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ обозначим $M_P : \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ отображение, заданное формулой $M_P(Q) \stackrel{\text{def}}{=} PQ$. Пусть $A \in T_E\,\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ — произвольная матрица (напомним, что $T_E\,\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(2\times 2)$). Обозначим L_A векторное поле на $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, значение которого в точке P равно $M_P'(E)A$. Докажите, что $[L_A, L_B] = L_C$, где $C = AB - BA$. Решите аналогичную задачу для многообразия $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

Задача 5. Проведем через каждую точку $m = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ плоскость Π_m, заданную уравнением $a(y-b) + (z-c) = 0$. Существует ли гладкая поверхность S (т.е. двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^3$), для которой в каждой точке $m \in S$ плоскость Π_m является касательной ?

Задача 6. Для каждой точки $m = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ обозначим $X(m), Y(m) \in T_m\mathbb{R}^3$ векторы, принадлежащие плоскости Π_m из задачи 5 и такие, что их ортогональные проекции на плоскость (x,y) равны, соответственно, $\frac{\partial}{\partial x} = (1,0)$ и $\frac{\partial}{\partial y} = (0,1)$. Найдите коммутатор векторных полей X и Y (в многообразии $\mathbb{R}^3$).

Задача 7. 1) Тривиально ли тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^1$? 2) Расклассифицируйте с точностью до эквивалентности все одномерные векторные расслоения с базой S^1.