ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ.

Задача 1. Докажите, что лента Мебиуса представляет собой неориентируемое расслоение ранга 1 над окружностью.

Задача 2. Ориентируемо ли тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$?

Задача 3. Ориентируемы ли следующие многообразия: 1) окружность S^1, 2) двумерный тор $\mathbb{T}^2$, 3) n-мерный тор $\mathbb{T}^n$, 4) бутылка Клейна, 5) проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$, 6) проективное пространство $\mathbb{R}P^n$, 7) группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$?

Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — замкнутая кривая на многообразии M (замкнутость означает, что $\gamma(0) = \gamma(1)$). Будем говорить, что последовательность $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ карт атласа накрывает кривую γ, если кривая проходит последовательно через U_{α_1}, затем через U_{α_2}, и т.д. (среди индексов α_i могут быть равные !). Говорят, что кривая γ меняет ориетацию расслоения $p : E \to M$, если среди отображений перехода $\Phi_{\alpha_i\alpha_{i+1}}$ (включая $\Phi_{\alpha_n\alpha_1}$), вычисленных в точках кривой, имеется нечетное количество таких, чей определитель отрицателен.

Задача 4. Докажите, что свойство кривой менять ориентацию расслоения не зависит от выбора цепочки карт, накрывающих кривую, и не зависит от выбора атласа на многообразии и координат на пространстве расслоения.

Задача 5. Докажите, что если имеется *гомотопия*, то есть семейство кривых γ_s, $0 \le s \le 1$ таких, что точка $\gamma_s(t) \in M$ зависит непрерывно как от t, так и от s, то все кривые γ_s одновременно сохраняют или меняют ориентацию расслоения.

Задача 6. Докажите, что расслоение неориентируемо тогда и только тогда, когда на многообразии существует по крайней мере одна кривая, меняющая его ориентацию.

Задача 7 (для знакомых с понятием фундаментальной группы). Определим отображение $P : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}_2$, полагая $P(\gamma) = 0$, если кривая γ сохраняет ориентацию расслоения, и $P(\gamma) = 1$, если меняет (из задачи 5 вытекает, что отображение определено корректно). Докажите, что P — гомоморфизм групп. Докажите, что если многообразие M односвязно (т.е. группа $\pi_1(M)$ тривиальна), то всякое расслоение с базой M ориентируемо.

Задача 8. Постройте пример неориентируемого расслоения 1) над $\mathbb{R}P^n$; 2) над “кренделем” (сферой с 2 ручками).