ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Задача 1. Вычислите $\int_{S^1} \gamma^* \nu$, где $\gamma : S^1 \to M$ — замкнутая кривая на многообразии M, а ν — 1-форма на M, в следующих случаях: 1) $M = S^2$, $\gamma : S^1 \to M$ — параллель $\psi = \psi_0$, $\nu(\psi, \varphi) = \cos\psi \, d\varphi$. 2) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, γ — единичная окружность с центром в начале координат, $\nu = z^k \, dz = (x+iy)^k \, (dx + i dy)$; здесь $k \in \mathbb{Z}$ произвольно.

Задача 2. 1) Пусть $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости, ограничивающая область U. Докажите, что $\int_{S^1} \gamma^*(x_1 \, dx_2)$ равен площади области U; здесь x_1, x_2 — стандартные координаты в $\mathbb{R}^2$. 2) Та же задача для кривой $\gamma : S^1 \to S^2$ и интеграла $\int_{S^1} \gamma^*(\cos\psi \, d\varphi)$, здесь ψ — широта, ψ — долгота, а радиус сферы предполагается равным 1 (ср. с задачей 1.1).

Задача 3. Пусть $F_t : S^1 \to S^1$ — семейство гладких отображений, зависящих от $t \in [0,1]$ непрерывно, и пусть для всякого $a \in S^1$ вектор $X(a) \in T_a S^1$ представляется кривой $\gamma(t) = F_t(a)$. Докажите, что для произвольной 1-формы ν на S^1 имеет место равенство $d\langle X, \nu \rangle = \frac{d}{dt} F_t^* \nu \big|_{t=0}$.

Задача 4. Докажите, что в ситуации задачи 3 интеграл $\int_{S^1} F_t^* \nu$ не зависит от t.

Задача 5. Пусть $F : S^1 \to S^1$ — отображение, образ которого не содержит точки $a \in S^1$. Докажите, что для любой 1-формы ν имеет место равенство $\int_{S^1} F^* \nu = 0$.

Задача 6. Пусть $F : S^1 \to S^1$ — произвольное гладкое отображение. Докажите, что существует такое число $k \in \mathbb{Z}$, что для любой 1-формы ν имеет место равенство $\int_{S^1} F^* \nu = k \int_{S^1} \nu$.