Высший Колледж Математики

Алгебраические кривые — по направлению к пространству модулей
Лекция 1. Способы задания алгебраических кривых.

Основным объектом нашего курса будут комплексные алгебраические кривые, или, что то же самое, римановы поверхности. Такие кривые обладают сложными индивидуальными характеристиками и, как правило, две различные кривые, даже если они одного рода, мало похожи друг на друга. Однако если мы рассматриваем кривые не поодиночке, а в *семействах*, то такие семейства уже устроены относительно просто и обладают многими замечательными свойствами, которые находят разнообразные применения в математике и теоретической физике. Переход от отдельных кривых к семействам и есть предмет нашего курса.

1. Комплексные проективные пространства

Все прямые в $n+1$-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$, проходящие через начало координат, образуют *n-мерное комплексное проективное пространство* $\mathbf{CP}^n$. Такая прямая однозначно определяется отличной от начала координат точкой $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$, через которую она проходит. В свою очередь, эта точка определена однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число λ: точка $(\lambda z_0, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)$ задает ту же самую прямую. Другими словами, $\mathbf{CP}^n$ — это факторпространство $(n+1)$-мерного комплексного пространства с выколотым началом координат по действию мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел умножением векторов на константы. Точку проективного пространства будем записывать в виде $(z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$, понимая под этим обозначением класс эквивалентности наборов координат относительно описанного выше отношения эквивалентности.

Полагая $z_i = 1$ поочередно для $i = 0, 1, \ldots, n$, мы получаем $n+1$ *карту* в проективном пространстве. Такая карта покрывает все пространство за исключением гиперплоскости $z_i = 0$ и является n-мерным комплексным пространством $\mathbf{C}^n$. Все координаты кроме i-ой в совокупности образуют набор координат в соответствующей карте.

При $n = 1$ мы имеем дело с одномерным проективным пространством $\mathbf{CP}^1$. Это один из первых примеров комплексных кривых. Ее называют также *рациональной кривой*. Вот другие простейшие примеры:

- комплексная прямая $\mathbf{C}$;
- любое открытое подмножество комплексной прямой, например,
  - единичный диск $|z| < 1$;
  - единичный диск с выколотым центром, $0 < |z| < 1$;
  - кольцо $0 < r < |z| < R$;
  - верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

Положив $z_0 = 1$ или $z_1 = 1$ в $\mathbf{CP}^1$, мы получаем две карты в $\mathbf{CP}^1$, каждая из которых представляет собой комплексную прямую $\mathbf{C}$. На первой из этих карт имеется координата z_1, на второй — координата z_0. Точку, не попавшую в карту, мы

будем называть бесконечностью; такая точка обозначается $z_1 = \infty$ в первой карте и соответственно $z_0 = \infty$ во второй.

2. Кривые в проективных пространствах

Пока речь будет идти только о гладких кривых.

Определим сначала кривую на проективной плоскости. Это подмножество $C \subset \mathbf{CP}^2$ проективной плоскости, задаваемое уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — невырожденный однородный многочлен от трех переменных. Условие невырожденности означает следующее. Пусть $A \in C$ — точка кривой. Рассмотрим произвольную карту, в которой лежит точка A; пусть это карта $z = 1$. Тогда для многочлена $f(x, y) = F(x, y, 1)$ дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

не обращается в нуль в точке A.

Упражнение 2.1. Проверьте, что условие невырожденности не зависит от выбора карты.

Замечание 2.2. Условие невырожденности удобно проверять, действуя в обратном направлении. Сначала следует найти точки вырождения многочлена $F(x, y, z)$ на проективной плоскости $\mathbf{CP}^2$. Как правило, их число конечно. Затем следует проверить, лежит ли какая-нибудь из них на нашей кривой C.

Пример 2.3. Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена F означает, что $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$, т.е. $x = y = z = 0$. Поскольку ни одна из точек проективной плоскости не имеет таких однородных координат, многочлен F невырожден на всей плоскости, а значит и на своем нулевом уровне.

Пример 2.4. Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0.$$

Условие вырождения многочлена F означает, что $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$, т.е. $x = y = 0$. Это условие выделяет точку $(0 : 0 : 1)$ на проективной плоскости. Точка вырождения лежит на кривой $x^2 + y^2 = 0$, поэтому рассматриваемая кривая особа. На самом деле она представляет из себя пару проективных прямых, задаваемых уравнениями $x + iy = 0$ и $x - iy = 0$. Эти прямые пересекаются в единственной точке — особой точке кривой.

Выбор координат на проективной плоскости (и, более общим образом, в проективном пространстве произвольной размерности) неоднозначен. От одной системы координат к другой можно перейти *проективным преобразованием* — линейным преобразованием $Z = AZ'$, рассматриваемым с точностью до умножения на константу (здесь Z, Z' — вектора-столбцы, A — невырожденная $(n + 1) \times (n + 1)$-матрица).

Упражнение 2.5. Пусть C — невырожденная коника на плоскости, т.е. невырожденная кривая, заданная уравнением второй степени. (Вообще гиперповерхность в проективном пространстве, заданная однородным уравнением второй степени, называется *квадрикой*.) Докажите, что в подходящей системе координат она имеет вид $x^2+y^2+z^2=0$.

Задавать кривые в трехмерном проективном пространстве и пространствах более высокой размерности сложнее.

Пример 2.6. Построим отображение проективной прямой $\mathbf{CP}^1$ в проективное пространство. Для этого

- введем однородные координаты $(t_0 : t_1)$ в $\mathbf{CP}^1$;
- введем однородные координаты $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ в $\mathbf{CP}^3$;
- рассмотрим отображение из $\mathbf{CP}^1$ в $\mathbf{CP}^3$, заданное формулой

$$t \mapsto (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3).$$

Образ проективной прямой при построенном отображении лежит на каждой из следующих квадрик:

$$\begin{aligned} z_0 z_3 - z_1 z_2 &= 0; \\ z_1^2 - z_0 z_2 &= 0; \\ z_2^2 - z_1 z_3 &= 0, \end{aligned}$$

и его можно определить как пересечение этих квадрик.

Упражнение 2.7. Проверьте, что пересечение любых двух из указанных в примере квадрик не совпадает с образом построенного отображения (т.е. содержит лишние точки).

Приведенный пример показывает, что трудно ожидать, чтобы кривая в проективном пространстве представлялась в виде пересечения *двух* гиперповерхностей (в общем случае n-мерного проективного пространства — в виде пересечения $n-1$ гиперповерхностей). Поэтому соответствующее определение естественно давать лишь *локально*.

Итак, *гладкой кривой* в n-мерном проективном пространстве называется такое множество точек C, что для любой точки $A \in C$ из этого множества существует такая окрестность этой точки и такой набор однородных многочленов $F_1, \ldots, F_{n-1}$, что в выбранной окрестности C совпадает с пересечением гиперповерхностей $F_1 = 0$, $\ldots$, $F_n = 0$, а дифференциалы $dF_1, \ldots, dF_{n-1}$ линейно независимы в точке A.

С топологической точки зрения гладкая кривая представляет собой двумерную поверхность.

Упражнение 2.8. Проверьте, что образ проективной прямой в приведенном выше примере является гладкой кривой.

3. Комплексная структура на кривой

Поскольку гладкая кривая в n-мерном проективном пространстве локально задается системой из $n-1$ полиномиальных уравнений, мы можем, по теореме о неявной функции, отождествить окрестность каждой точки такой кривой с единичным диском в $\mathbf{C}^1$.

Тем самым, для каждой точки A такой кривой C имеется взаимно-однозначное отображение m_U из некоторой окрестности $U = U(A) \subset C$ этой точки на единичный диск. Разумеется, таких окрестностей и таких отображений много. Такое отображение называется *локальной координатой* в выбранной окрестности[1]. При этом если две такие окрестности U, V пересекаются, то отображение $m_U m_V^{-1}$, определенное в некоторой области единичного диска, оказывается *голоморфным*. Такой набор окрестностей и локальных координат называется *комплексной структурой* на кривой.

Понятие комплексной структуры позволяет ввести и понятие голоморфного отображения комплексных кривых. Отображение $f : C \to C'$ комплексных кривых, наделенных комплексными структурами $\{(U, m_U)\}$ и $\{(U', m_{U'})\}$ соответственно, называется *голоморфным*, если для любой точки $A \in C$ существует окрестность $U' \subset C'$ точки $f(A')$ вместе с отображением $m'_{U'} : U' \to \mathbf{C}$ и окрестность U точки A вместе с отображением $m_U : U \to \mathbf{C}$, такие, что отображение $m'_{U'} f m_U^{-1}$ голоморфно там, где оно определено (область его определения заведомо непуста). Ясно, что если указанное сквозное отображение голоморфно для некоторой пары окрестностей и локальных координат, то оно голоморфно и для любой такой пары.

Пример 3.1. Множество прямых, проходящих через заданную точку проективной плоскости, образует проективную прямую. Поэтому, зафиксировав в $\mathbf{CP}^2$ точку A, мы можем построить отображение из произвольной плоской кривой C в проективную прямую: нужно каждой точке кривой C сопоставить прямую, проходящую через точку A и выбранную точку кривой. Докажите, что это отображение голоморфно.

Взаимнооднозначное голоморфное отображение пары кривых, такое, что обратное к нему тоже голоморфно, называется *биголоморфным* отображением, или *изоморфизмом* кривых.

4. Разветвленные накрытия

Поскольку с топологической точки зрения комплексные кривые представляют собой вещественные двумерные поверхности, мы будем применять к ним топологические понятия (накрытие, компактность и проч.).

Пусть у нас есть какая-нибудь комплексная кривая C, Y — двумерная поверхность и $f : Y \to C$ — накрытие. Тогда мы можем «поднять» комплексную структуру с кривой C на Y. Делается это так. Возьмем точку $y \in Y$ и ее образ $t = f(y)$ при накрытии f. У точки $t \in C$ есть окрестность $U = U(t)$, такая, что ограничение накрывающего отображения на связную компоненту прообраза $f^{-1}(U)$, содержащую y, взаимнооднозначно. Комплексная координата на такой окрестности вводится как композиция $m_U \circ f$ (если окрестность U не входит в число окрестностей, задающих комплексную структуру, то нужно взять какую-нибудь определяющую окрестность и ограничить координатное отображение с нее на ее пересечение с U, считая это пересечение новой координатной окрестностью).

Упражнение 4.1. Проверьте, что так определенные локальные координаты действительно задают комплексную структуру на Y. Это означает, что на пересечении определяющих окрестностей замены локальных координат голоморфны.

[1] Иногда в определении локальной координаты требуют, чтобы точка A отображалась в центр диска.

В простейшей — и чрезвычайно важной — ситуации речь идет о конечнократных накрытиях проколотой сферы. Пусть кривая C — это проективная прямая $\mathbf{CP}^1$, из которой выколото конечное множество точек $T = \{t_1, \ldots, t_c\}$. Для конечнократного накрытия $f : Y \to \mathbf{CP}^1 \setminus T$ кратности d следующим образом определено понятие монодромии. Возьмем какую-нибудь точку $t_0 \in \mathbf{CP}^1 \setminus T$. Любой гладкий путь γ в $\mathbf{CP}^1 \setminus T$ с началом и концом в точке t_0, не проходящий более через t_0, определяет перестановку конечного множества из d элементов — прообраза $f^{-1}(t_0) \subset Y$: нужно рассмотреть поднятие $f^{-1}(\gamma) \subset Y$ этого пути и выкинуть из него слой над точкой t_0; тогда прообраз пути разбивается на d компонент связности, конец каждой из которых задает, куда переходит его начало. Полученная перестановка и называется *монодромией слоя вдоль пути* γ.

Упражнение 4.2. Проверьте, что монодромия вдоль пути зависит только от гомотопического класса этого пути и что монодромия является гомоморфизмом $\pi_1(\mathbf{CP}^1 \setminus T, t_0) \to S_d$ из фундаментальной группы проколотой сферы с базисной точкой t_0 в группу S_d перестановок слоя.

Соединим теперь точку t_0 с точкой t_i несамопересекающимся отрезком гладкой кривой, не проходящим через точки t_j для $j \neq i$. Такому отрезку можно сопоставить путь γ_i, который идет от t_0 к t_i вдоль выбранного отрезка, затем обходит вокруг точки t_i против часовой стрелки, затем возвращается вдоль выбранного отрезка в точку t_0. Проделаем теперь это с каждым из проколов t_i, следя за тем, чтобы

- отрезки, идущие в проколотые точки, пересекались попарно лишь в базисной точке t_0;
- циклический порядок, в котором отрезки выходят из точки t_0, совпадал бы с порядком нумерации проколотых точек.

В результате получим граф-звезду на $\mathbf{CP}^1$ с центром в точке t_0 и лучами, идущими из t_0 в t_i.

Тем самым мы построили набор перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_c$ на прообразе $f^{-1}(y_0) \in Y$, обладающий следующими свойствами:

- подгруппа в S_d, порожденная перестановками $\sigma_1, \ldots, \sigma_c$, действует на слое *транзитивно*, т.е. для любой пары точек в прообразе есть перестановка из подгруппы, переводящая первую точку во вторую;
- последовательное произведение $\sigma_c \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ всех этих перестановок является тождественной перестановкой.

Упражнение 4.3. Докажите эти свойства.

Упражнение 4.4. Докажите, что для любого набора точек $T = \{t_1, \ldots, t_c\}$ на сфере, любой звезды на этих точках и любого набора перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_c$, обладающих двумя приведенными выше свойствами, существует накрытие $Y \to S^2 \setminus T$, монодромия которого вдоль пути γ_i совпадает с σ_i. Это накрытие единственно, т.е. для двух таких накрытий $f_1 : Y_1 \to S^2$, $f_2 : Y_1 \to S^2$ существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, такой, что $f_2 = h \circ f_1$.

Таким образом, мы получили еще один, чрезвычайно мощный, инструмент построения комплексных кривых. Для того, чтобы построить такую кривую, нужно взять

на комплексной проективной прямой набор точек, построить звезду с лучами, идущими в эти точки (звезда задается с точностью до гомотопической эквивалентности) и задаться набором перестановок множества из d элементов, обладающим двумя выписанными свойствами.

Важным свойством накрытий проколотой сферы является то, что их можно достроить до разветвленных накрытий компактных поверхностей. А именно, для конечнократного накрытия $f : Y \to S^2 \setminus T$ существует единственное непрерывное отображение $\bar{f} : \overline{Y} \to S^2$ компактной поверхности $\overline{Y}$, содержащей Y и такой, что $\overline{Y} \setminus Y$ состоит из конечного множества точек, ограничение которого на Y совпадает с f.

Поверхность $\overline{Y}$ и отображение $\bar{f}$ строятся следующим образом. Для каждой точки проколотой сферы прообраз ее достаточно маленькой круговой окрестности при отображении f состоит из d компонент связности, каждая из которых гомеоморфна диску. Если же мы возьмем малую окрестность выколотой точки (которая представляет собой проколотый диск), то ее прообраз состоит, вообще говоря, из менее, чем d компонент связности, каждая из которых также является проколотым диском. Число этих компонент связности в прообразе окрестности точки t_i совпадает с числом циклов в перестановке σ_i. А степень ограничения отображения f на такую компоненту связности есть не что иное как длина цикла. Теперь поверхность $\overline{Y}$ строится очень просто: нужно в поверхности Y вклеить по точке в каждый из проколотых дисков в прообразах малых окрестностей точек, выколотых из сферы. Общее количество вклеенных точек будет равно суммарному числу циклов в перестановках σ_i.

Упражнение 4.5. Проверьте, что цикловой тип (т.е. количество циклов и набор их длин) перестановки σ_i не зависит от выбора базисной точки t_0 и пути, соединяющего ее с t_i.

Точки в образе разветвленного накрытия, число прообразов которых меньше степени накрытия, называются *точками ветвления*, или *критическими значениями*, накрытия. Важным свойством разветвленных накрытий является возможность продолжить комплексную структуру в окрестности прообразов точек ветвления. А именно, пусть $y \in \overline{Y}$ — прообраз точки ветвления $\bar{f}(y) = t$. Тогда у точки y есть проколотая круговая окрестность, которая накрывает проколотую окрестность точки t с некоторой кратностью k (эта кратность называется *порядком ветвления*, в данной точке прообраза). Выбрав координату z в окрестности точки $t \in \mathbf{CP}^1$, мы можем ввести на накрывающей проколотой окрестности точки y координату $z^{1/k}$, которая, как нетрудно видеть, продолжается в точку, заклеивающую прокол. Как мы увидим, всякую гладкую компактную комплексную кривую можно получить как разветвленное накрытие сферы.

Упражнение 4.6. Пусть накрываемая поверхность представляет собой не сферу, а проколотую поверхность более высокого рода. Как нужно изменить понятия звезды и набора перестановок, чтобы накрывающая поверхность по-прежнему восстанавливалась однозначно?

5. Факторкривая

Еще один способ построения комплексных кривых состоит наоборот в опускании комплексной структуры с кривой на накрываемую кривую. Допустим на комплексной кривой Y дискретно действует группа преобразований G, сохраняющих комплексную

структуру. Тогда факторпространство — т.е. множество орбит — по действию этой группы наделено естественной структурой комплексной кривой.

Пример 5.1. Пусть $Y = \mathbf{C}$ — комплексная прямая. Рассмотрим на этой прямой целочисленную решетку, порожденную над $\mathbf{Z}$ двумя векторами 1 и τ, где $\tau \in \mathbf{C}$ — комплексное число с положительной мнимой частью. Сдвиги на эти два вектора порождают группу преобразований комплексной прямой, сохраняющих комплексную структуру на $\mathbf{C}$. Это свободная коммутативная группа с двумя образующими. Ее орбиты являются всевозможными сдвигами целочисленной решетки. Фактор по действию этой группы — тор, который можно отождествить с параллелограммом, натянутым на векторы 1 и τ, с отождествленными противоположными сторонами. Такой тор называется *эллиптической кривой.*

Упражнение 5.2. Докажите, что *кривая Ферма* $x^n + y^n = z^n$ на проективной плоскости гладкая.

Упражнение 5.3. Определим отображение кривой Ферма в $\mathbf{CP}^1$, положив в карте $z = 1$ значение этого отображения равным координате x точки кривой. а) Докажите, что построенное отображение достраивается до голоморфного отображения из кривой Ферма в $\mathbf{CP}^1$. б) Найдите точки ветвления этого отображения и порядки ветвления в их прообразах.

Упражнение 5.4. Определим отображение кривой Ферма в $\mathbf{CP}^1$, положив в карте $z = 1$ значение этого отображения равным n-ой степени координаты x точки кривой. а) Докажите, что построенное отображение достраивается до голоморфного отображения из кривой Ферма в $\mathbf{CP}^1$. б) Найдите точки ветвления этого отображения и порядки ветвления в их прообразах. в) Докажите, что прообраз вещественной прямой относительно этого отображения является полным трехдольным графом $K_{n,n,n}$ (вершины графа — прообразы критических значений, ребра — прообразы соединяющих их вещественных отрезков).

Замечание 5.5. Эта конструкция дает вложение графа $K_{n,n,n}$ в поверхность минимально возможного рода.

Упражнение 5.6. Пусть C — гладкая плоская коника $x^2 + y^2 = z^2$. Постройте биголоморфное отождествление кривой C и проективной прямой.

Упражнение 5.7. Пусть Y — плоская кривая, заданная в карте $z = 1$ уравнением $y^2 = x - x^3$. а) Нарисуйте вещественную часть этой кривой. б) Найдите точки ветвления проекции этой кривой на ось x и на ось y и порядки ветвления в их прообразах.

Упражнение 5.8. Приведите пример двух неизоморфных эллиптических кривых.