Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 3. Векторные поля и дифференциальные формы.

1. Касательное и кокасательное расслоения

Риманова поверхность представляет собой одномерное комплексное многообразие. Над каждым — вещественным ли, комплексным ли — многообразием есть естественные расслоения. Для определенности мы будем говорить ниже о комплексных многообразиях, которые нас в первую очередь и интересуют. Прежде всего мы можем рассмотреть расслоение прямого произведения $M \times \mathbf{C}$, где M — наше многообразие. Проектирующее отображение расслоения — это проекция на первый сомножитель. Разумеется, можно рассматривать произведение многообразия и на векторное пространство большей размерности, однако эта конструкция нам пока не понадобится.

Еще два естественных расслоения, которые имеются над любым многообразием — это касательное и кокасательное расслоение. Напомним их определения.

Касательный вектор в точке t многообразия M можно определить следующими способами. Во-первых, его можно считать классом эквивалентности голоморфных отображений $D \to M$ единичного диска D в M, переводящих 0 в t. При этом два отображения γ_1, γ_2 считаются эквивалентными, если расстояние $\rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ стремится к нулю быстрее, чем x, при $x \to 0$; это означает, что

$$\lim_{x\to 0} \rho(\gamma_1(x), \gamma_2(x))/|x| = 0.$$

Метрика ρ в этом определении может быть произвольной.

Другое определение более алгебраично, однако с ним легче работать. Согласно ему, *касательным вектором* в точке t называется дифференцирование из кольца ростков в точке t в кольцо комплексных чисел. *Дифференцирование* это линейное отображение колец, удовлетворяющее *правилу Лейбница*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(t) + f(t)\delta(g).$$

Из этого определения очевидно, например, что все касательные векторы в точке образуют векторное пространство. Размерность этого векторного пространства совпадает с размерностью многообразия. В частности, касательное пространство к кривой одномерно.

Двойственное к касательному векторному пространству называется *кокасательным*. Оно состоит из линейных функционалов на касательном пространстве, называемых также *кокасательными векторами*.

В произвольной локальной координате z на кривой касательный вектор записывается в виде ad/dz. В произвольных локальных координатах $z_1, \dots, z_n$ на многообразии размерности n — в виде $a_1\partial/\partial z_1 + \dots + a_n\partial/\partial z_n$. Соответственно, кокасательный вектор имеет координатное представление adz или, в общем случае, $a_1dz_1 + \dots + a_ndz_n$.

Совокупность касательных (соотв., кокасательных) пространств во всех точках многообразия является *касательным* (соотв., *кокасательным*) расслоением над многообразием. Касательное и кокасательное расслоение над комплексной кривой имеют *ранг один*, т.е. они *линейны*, поскольку их слои одномерны.

Определение 1.1. *Линейным расслоением* на многообразии называется векторное расслоение ранга один.

Векторное поле это совокупность касательных векторов в каждой точке многообразия. При этом вектор должен зависеть от точки многообразия голоморфно. Другими словами, это *голоморфное сечение* касательного расслоения. Соответственно, голоморфное сечение кокасательного расслоения называется *голоморфной дифференциальной 1-формой.* Аналогично, голоморфная функция на многообразии это голоморфное сечение тривиального линейного расслоения, т.е. прямого произведения $M \times \mathbf{C}$, рассматриваемого как расслоение над M.

В локальной координате голоморфное векторное поле и голоморфная 1-форма имеют соответственно вид

$$a(z)\frac{d}{dz} \qquad \text{и} \qquad a(z)dz,$$

где a — голоморфная функция.

Заметим, что координатное представление векторного поля и 1-формы по-разному ведет себя при замене координаты. Пусть мы выполнили замену координаты $z = g(z_1)$. Тогда в новой координате 1-форма имеет вид

$$a(z)dz = a(g(z_1))dg(z_1) = a(g(z_1))g'(z_1)dz_1.$$

Выписать преобразование векторного поля сложнее. Для этого посмотрим, как наше поле действует на функцию z_1:

$$a(z)\frac{dz_1}{dz} = a(z)\frac{dg^{-1}(z)}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(g(z_1))}.$$

Поэтому замена координаты следующим образом отражается на векторном поле:

$$a(z)\frac{d}{dz} = \frac{a(g(z_1))}{g'(z_1)}\frac{d}{dz_1}.$$

Однако голоморфные векторные поля и дифференциальные формы, также как и голоморфные функции, на компактных комплексных кривых чрезвычайно редки. Поэтому наряду с ними мы будем рассматривать и мероморфные векторные поля и функции, т.е. мероморфные сечения касательного и кокасательного расслоений. У каждой точки такого сечения, за исключением конечного числа, есть окрестность, в любой локальной координате z на которой коэффициент при d/dz (соотв., при dz) записывается в виде голоморфной функции. В отдельных же точках такому коэффициенту разрешается иметь полюса. Порядок полюса коэффициента называется *порядком полюса* мероморфного векторного поля и мероморфной функции. Он не зависит от выбора локальной координаты на кривой.

Мероморфная функция это мероморфное сечение тривиального линейного расслоения. Мероморфное векторное поле можно определить также как дифференцирование из кольца мероморфных функций в себя.

2. Как задавать векторные поля и дифференциальные формы

Рассмотрим сначала случай рациональной кривой. В произвольной координате z на $\mathbf{CP}^1$ мероморфная дифференциальная форма записывается в виде $a(z)dz$, где a — некоторая мероморфная (т.е., рациональная) функция. Замена координат $z = 1/z_1$ показывает, что и в самом деле, в точке $z = \infty$ коэффициент при dz_1 является мероморфной функцией. Аналогично, всякое мероморфное векторное поле записывается в виде $a(z)d/dz$. Посмотрим, как выглядят голоморфные дифференциальные 1-формы и векторные поля.

Рассмотрим дифференциальную 1-форму dz на $\mathbf{CP}^1$. Подстановка $z = 1/z_1$ показывает, что у такой 1-формы имеется полюс порядка 2 в точке $z = \infty$:

$$dz = -\frac{1}{z_1^2} dz_1.$$

Но это означает, что и у любой ненулевой мероморфной 1-формы есть полюса! Действительно, пусть ω — произвольная мероморфная 1-форма. Тогда ω/dz — ненулевая мероморфная функция; обозначим эту функцию через f. Тогда $\omega = f dz$, и у 1-формы есть полюса во всех тех точках, где они есть у f. Если же у f нет полюсов в точках, отличных от $z = \infty$, то у ω обязательно есть полюс в $z = \infty$. Тем самым, мы доказали, что на рациональной кривой нет ненулевых голоморфных 1-форм или, другими словами, что размерность пространства голоморфных 1-форм на $\mathbf{CP}^1$ равна нулю.

Упражнение 2.1. Подсчитайте размерность пространства голоморфных векторных полей на $\mathbf{CP}^1$.

На самом деле, утверждение о том, что у ненулевой мероморфной 1-формы на $\mathbf{CP}^1$ есть полюса, можно уточнить. А именно, рассмотрим порядки всех нулей и всех полюсов произвольной мероморфной 1-формы ω. Тогда разность между суммой порядков всех нулей и суммой порядков всех полюсов равна -2. Действительно, для формы dz это так, а умножение этой формы на ненулевую мероморфную функцию увеличивает сумму порядков нулей на столько же, насколько и сумму порядков полюсов.

Упражнение 2.2. Чему равна разность суммы порядков нулей и суммы порядков полюсов мероморфного векторного поля на $\mathbf{CP}^1$?

Мы увидим впоследствии, что работать с дифференциальными формами гораздо легче, чем с векторными полями; поэтому разговор будет идти в первую очередь об 1-формах на кривых.

С каждой мероморфной функцией на кривой C можно связать мероморфную 1-форму на ней. А именно, мы можем сопоставить функции f ее *дифференциал* df. Например, 1-форма dz является дифференциалом мероморфной функции z.

Упражнение 2.3. Проверьте, что мероморфная 1-форма dz/z не является дифференциалом никакой мероморфной функции.

Тем самым, у нас имеется линейное отображение из пространства мероморфных функций в пространство мероморфных 1-форм. Элементы образа этого отображения называются *точными* дифференциальными 1-формами. Как показывает предыдущее упражнение, не всякая мероморфная 1-форма на кривой точна.

Упражнение 2.4. Сформулируйте простое необходимое и достаточное условие того, чтобы мероморфная 1-форма на $\mathbf{CP}^1$ была точна.

Дифференциальные формы — аналогично функциям, но в отличие от векторных полей — преобразуются при отображении многообразий в направлении, обратном действию отображения. Это позволяет задавать их теми же способами, что мы использовали для задания функций.

Если наша кривая C вложена в проективное пространство, то мероморфную 1-форму на ней можно задать путем ограничения мероморфной 1-формы на объемлющем пространстве. Действительно, касательная прямая к кривой в точке естественно вложена в касательное пространство к объемлющему пространству в той же точке. Дифференциальная 1-форма представляет собой семейство линейных функционалов на касательных пространствах в каждой точке объемлющего пространства. Ограничивая ее на касательную прямую к кривой, мы получаем семейство линейных функционалов на касательных прямых к кривой, т.е. дифференциальную 1-форму на ней.

Упражнение 2.5. Проверьте, что если мероморфная 1-форма на объемлющем пространстве является дифференциалом мероморфной функции на нем, то ее ограничение на кривую является дифференциалом ограничения функции на кривую.

Упражнение 2.6. Найдите порядки нулей и полюсов ограничения на кривую

$$x^n + y^n = 1$$

дифференциальных 1-форм а) xdx, б) xdy.

Аналогично, голоморфное отображение $g : C_1 \to C_2$ комплексных кривых позволяет построить по мероморфной 1-форме ω на C_2 мероморфную 1-форму на C_1, которую мы будем обозначать $g^*\omega$. По определению, значение такой 1-формы на касательном векторе τ равно $\omega(dg(\tau))$, где $dg(\tau)$ — касательный вектор в C_2, образ вектора τ при касательном отображении dg. Это определение полностью совпадает с определением ограничения 1-формы на кривую в проективном пространстве, только вместо вложения в проективное пространство мы берем отображение в другую кривую.

Упражнение 2.7. Рассмотрим проекцию кривой $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на этой кривой является поднятием 1-формы с оси x при этом отображении?

Если же, как обычно, на кривой дискретно действует группа ее автоморфизмов, то любая мероморфная 1-форма на этой кривой, *инвариантная относительно действия этой группы автоморфизмов*, опускается до мероморфной 1-формы на факторкривой. То же, впрочем, справедливо и для векторных полей.

Пример 2.8. Рассмотрим на комплексной прямой $\mathbf{C}$ с координатой z дифференциальную 1-форму dz. Эта 1-форма инвариантна относительно сдвигов $z \mapsto z + z_0$ комплексной прямой, поэтому она опускается на любую эллиптическую кривую. (Напомним, что эллиптической кривой называется факторкривая прямой $\mathbf{C}$ по действию решетки сдвигов, натянутой на пару векторов $1, \tau \in \mathbf{C}$, где $\Re\tau > 0$.) Эта форма не имеет полюсов на $\mathbf{C}$, поэтому ее образ на любой эллиптической кривой является голоморфной 1-формой на ней. Тем самым мы построили на эллиптических кривых по голоморфной 1-форме.

Упражнение 2.9. Докажите, что любая голоморфная 1-форма на эллиптической кривой пропорциональна построенной выше с постоянным коэффициентом пропорциональности. Это означает, что пространство голоморфных 1-форм на эллиптической кривой одномерно над $\mathbf{C}$.

У построенной голоморфной 1-формы на эллиптической кривой нет не только полюсов, у нее нет и ни одного нуля. Это означает, что у *любой мероморфной* 1-формы на эллиптической кривой разность суммы порядков ее нулей и суммы порядков ее полюсов равна нулю.

3. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой

Проведенные выше вычисления показывают, что размерность пространства голоморфных 1-форм на $\mathbf{CP}^1$ равна нулю, а на эллиптической кривой она равна 1. Эти наблюдения позволяют заподозрить, что размерность этого пространства тесно связана с родом кривой. Сейчас мы приведем еще один чрезвычайно важный аргумент в пользу того, что эта размерность просто равна роду кривой. Мы докажем, что это утверждение справедливо для плоских кривых. (Напомним, что не любая кривая может быть вложена в плоскость: это условие накладывает сильные ограничения на род.)

Итак,

Теорема 3.1. *Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой равна роду этой кривой.*

Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что размерность пространства голоморфных 1-форм не меньше рода кривой. Оценку в обратную сторону проведем в следующем разделе.

Пусть d — степень плоской кривой C. Как мы знаем, в этом случае ее род равен $g = (d-1)(d-2)/2$. Мы знаем, что кривые степени 1 и 2 рациональны, и для них утверждение теоремы справедливо. В дальнейшем будем предполагать, что $d \geq 3$. Рассмотрим в проективной плоскости прямую, пересекающую кривую C в d различных точках и выберем систему координат $(x : y : z)$ таким образом, чтобы уравнением выбранной прямой было $z = 0$.

Рассмотрим теперь пространство S^{d-3} однородных многочленов степени $d-3$ от переменных x, y, z. Это векторное пространство над полем комплексных чисел.

Упражнение 3.2. Докажите, что размерность этого пространства равна $(d-1)(d-2)/2$.

Мы построим по каждому такому многочлену голоморфную 1-форму на C, причем построенное отображение из S^{d-3} в пространство голоморфных 1-форм будет линейным и инъективным. Пусть кривая C задается однородным уравнением $F(x,y,z) = 0$ степени d, которое в карте $z = 1$ имеет вид $f(x,y) = 0$.

Сопоставим произвольному однородному многочлену $G(x,y,z)$ многочлен $g(x,y) = G(x,y,1)$ и дифференциальную 1-форму

$$\frac{g\,dx}{\partial f/\partial y}.$$

Эта 1-форма определена в тех точках плоскости, в которых частная производная многочлена f по y не обращается в нуль, и ее ограничение на C в этих точках является голоморфной 1-формой. Что происходит в тех точках, где $\partial f/\partial y = 0$? В силу того, что дифференциал многочлена f на кривой C равен нулю, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

мы заключаем, что

$$\frac{dx}{\partial f/\partial y} = -\frac{dy}{\partial f/\partial x}$$

на кривой. Тем самым, выписанная выше дифференциальная 1-форма на кривой может быть переписана в виде

$$-\frac{g\,dy}{\partial f/\partial x}.$$

Поскольку кривая C гладкая, обе частные производные по x и по y не могут обратиться в нуль в одной точке этой кривой, а значит указанная 1-форма голоморфна на аффинной части кривой.

Проверим теперь, что если степень многочлена G равна $d-3$, то построенная 1-форма голоморфно продолжается в точки пересечения кривой C с прямой $z=0$. Перейдем от координат $(x:y:1)$ к координатам $(1:u:v)$, т.е. выполним замену

$$x = 1/v; \qquad y = u/v.$$

В координатах u, v наша 1-форма примет вид

$$-\frac{g\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)\frac{dv}{v^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)},$$

или, после умножения на v^{d-1},

$$-\frac{v^{d-3}g\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)dv}{v^{d-1}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)}.$$

Числитель последнего выражения есть многочлен, поскольку степень многочлена g равна $d-3$, а знаменатель есть не что иное как производная по u функции $F(1,u,v)$. Если она случайно равна 0, то мы можем перейти к производной по v, как мы это уже делали, заменяя y на x, если производная по y оказывалась равной нулю. Поэтому частное представляет собой отношение многочлена и функции, отличной от нуля в выбранной точке, а значит не может иметь в ней полюса. Поэтому все 1-формы, которые строятся по многочленам степени $d-3$, голоморфны.

Отображение, сопоставляющее многочлену 1-форму, является линейным отображением векторных пространств. Его ограничение на пространство многочленов степени $d-3$ инъективно, т.е. не имеет ядра. Действительно, многочлен при таком отображении переходит в нуль только в том случае, если он тождественно равен нулю на кривой C. Для многочленов степени $d-3$ это невозможно, поскольку степень кривой C есть $d > d-3$. Поэтому на плоской кривой степени d есть по меньшей мере столько линейно независимых 1-форм, какова размерность пространства однородных многочленов степени $d-3$ от трех переменных.

Замечание 3.3. Выбор сопоставления многочлену 1-формы неслучаен. На самом деле, на проективной плоскости имеется выделенная *2-форма* ω, которая в карте $z=1$ имеет координатную запись $dx \wedge dy$. Теперь мы можем сопоставить многочлену 1-форму на кривой по правилу

$$g \mapsto \frac{g\omega}{df}.$$

Проведенные выше рассуждения означают, что указанная 1-форма определена корректно, а если степень многочлена g не превосходит $d-3$, то она является и голоморфной 1-формой на кривой. Такая 1-форма (и ее многомерные обобщения) называется *формой Гельфанда–Лере.*

4. Интегрирование 1-форм

Таким образом, осталось доказать, что размерность пространства голоморфных 1-форм не больше рода кривой. Принципиальным моментом здесь является возможность проинтегрировать 1-форму по вещественной кривой на поверхности. Зафиксируем на кривой C точку x_0 и рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to C$, $\gamma(0) = x_0$. Тогда для этой кривой определен интеграл

$$\int_\gamma \omega$$

от любой 1-формы ω. При этом, согласно формуле Стокса, интеграл зависит лишь от гомотопического класса кривой γ в пространстве кривых с фиксированными концами. Если мы будем немного менять конец $\gamma(1)$ кривой, не меняя ее гомотопического типа, то интеграл станет функцией от второго конца кривой.

Если 1-форма ω является точной, $\omega = df$ для некоторой функции f, то ее интеграл по любому замкнутому (с общими началом и концом) пути равен нулю.

Рассмотрим теперь какой-нибудь набор замкнутых путей $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ с началом и концом в точке x_0, классы которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbf{Z})$.

Лемма 4.1. *Пусть ω — вещественная 1-форма на поверхности C. Если интегралы $\int_{\gamma_i} \omega$ 1-формы ω по всем циклам γ_i, $i = 1, \dots, 2g$, равны нулю, то форма ω точна, $\omega = df$. При этом если форма ω голоморфна, то и функция f голоморфна.*

Доказательство стандартно: мы строим по 1-форме ω функцию f по правилу

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega.$$

Этот интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точки x_0 и x из-за условия на интегралы по циклам. Лемма доказана.

Теперь мы знаем, что размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой не превосходит $2g$. Действительно, каждой такой 1-форме мы можем сопоставить набор ее интегралов по циклам γ_i. Если у двух голоморфных 1-форм все интегралы совпадают, то их разность имеет нулевые интегралы, а значит является дифференциалом голоморфной функции. Но поскольку на компактной кривой нет непостоянных голоморфных функций, эта разность равна нулю. Поэтому пространство голоморфных 1-форм не более, чем $2g$-мерно. Мы же хотим доказать, что оно не более, чем g-мерно.

Для этого наряду с голоморфными формами ω рассмотрим сопряженные с ними антиголоморфные формы $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k$, $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда будет следовать нужное нам неравенство.

Необходимое нам утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.2. *Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 на C сумма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции f, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.*

Доказательство леммы остается в качестве упражнения.