Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 4. Линейные системы и отображения кривых в проективное пространство.

1. Отображения кривых в проективное пространство, связанные с линейными расслоениями

Тривиальное расслоение с одномерным слоем, касательное и кокасательное расслоение к кривой, а также их тензорные степени — все они являются примерами линейных расслоений. Соответственно, функции, векторные поля и 1-формы являются примерами сечений линейных расслоений. Если мы зафиксировали линейное расслоение и выбрали $p+1$ его сечение, то по этим данным мы можем построить отображение нашей кривой в p-мерное проективное пространство.

Пусть $L \to C$ — линейное расслоение над кривой, $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_p$ — набор его мероморфных сечений. Тогда отображение $C \to \mathbf{CP}^p$, $x \mapsto (\sigma_0 : \sigma_1 : \dots : \sigma_p)$ определено корректно всюду, кроме тех точек, где все сечения одновременно обращаются в нуль или в бесконечность. Действительно, в любой точке кривой любые два вектора в слое нашего расслоения пропорциональны друг другу с комплексным коэффициентом пропорциональности.

Упражнение 1.1. Проверьте, что если хотя бы одно из сечений σ_i не равно нулю тождественно, то отображение кривой в проективное пространство, определенное изначально на дополнении к множеству общих нулей всех сечений, продолжается до голоморфного отображения всей кривой.

Такое отображение особенно привлекательно и естественно выглядит в случае, когда L это кокасательное расслоение, а в качестве сечений мы выбираем произвольный базис $\omega_1, \dots, \omega_g$ голоморфных 1-форм. Образ такого отображения определен однозначно с точностью до проективной замены координат: такая замена определяется заменой выбранного базиса в пространстве голоморфных 1-форм. В силу подобной однозначности этот образ называется *канонической кривой*, а само отображение кривой называется *каноническим отображением*. Как мы увидим впоследствии, каноническое отображение почти всегда является вложением.

Упражнение 1.2. Почему каноническое отображение строится по кокасательному расслоению, а не по тривиальному или касательному?

Отображения, аналогичные каноническому, можно построить и по тензорным степеням кокасательного расслоения. Они называются *плюриканоническими отображениями*. Если тензорную степень взять достаточно высокой (например, равной 3), то плюриканоническое отображение будет вложением уже на любой кривой (при $g \geq 2$).

2. Дивизоры

Голоморфные дифференциалы — не единственное конечномерное пространство, ассоциированное с комплексной кривой. Если снизить требования к естественности, то мы можем рассмотреть над кривой много разных конечномерных пространств сечений линейных расслоений. Такие пространства связываются с дивизорами на кривой.

Определение 2.1. *Дивизором* на кривой C называется формальная конечная линейная комбинация $\sum a_i x_i$ точек этой кривой.

Другой, и зачастую более удобный, способ обозначения дивизоров состоит в том, чтобы записывать их в виде суммы $\sum_{x \in C} a_x x$ по *всем* точкам кривой C, в которой лишь *конечное* число коэффициентов отлично от нуля. В дальнейшем мы будем рассматривать только дивизоры с целыми коэффициентами.

Если мы рассматриваем наборы точек на двумерной гладкой поверхности, то любой такой набор можно перевести диффеоморфизмом в любой другой набор с тем же числом точек. Для поверхностей, наделенных комплексной структурой, однако, аналогичное утверждение неверно: не всякий набор точек переводится в другой набор с тем же числом точек биголоморфным отображением кривой. Поэтому дивизоры образуют класс объектов с нетривиальной структурой.

Пример 2.2. С каждым не тождественно нулевым мероморфным сечением σ произвольного линейного расслоения над кривой C связывается дивизор (σ) его нулей и полюсов. Этот дивизор имеет вид $(\sigma) = \sum \mathrm{ord}_{p_i}\sigma \cdot p_i$, где точки p_i пробегают все нули и полюса сечения σ, а $\mathrm{ord}_{p_i}\sigma$ — это порядок соответственно нуля (положительное число) или полюса (отрицательное число) сечения в точке p_i. Заметим, что суммирование по всем точкам кривой C приводит к тому же результату.

В частности, с каждой мероморфной функцией f можно связать ее дивизор (f), с каждой мероморфной 1-формой ω — ее дивизор (ω), и т.д.

Дивизоры можно складывать — суммирование дивизоров сводится к суммированию коэффициентов у точек кривой, и они образуют коммутативную группу относительно операции сложения. Нулем в этой группе является нулевой дивизор. В группе дивизоров можно ввести естественное отношение эквивалентности: два дивизора D_1, D_2 называются *линейно эквивалентными*, если на кривой существует функция f с дивизором $D_1 - D_2$.

Упражнение 2.3. Проверьте, что сложение дивизоров индуцирует структуру группы на множестве классов линейной эквивалентности дивизоров.

Два дивизора (σ_1), (σ_2), определяемых ненулевыми сечениями σ_1, σ_2 одного и того же линейного расслоения, всегда линейно эквивалентны, поскольку любое из этих сечений получается из другого умножением на некоторую мероморфную функцию, $\sigma_2 = f\sigma_1$. Наоборот, если дивизор D_2 линейно эквивалентен дивизору $D_1 = (\sigma_1)$ сечения σ_1, то у расслоения существует сечение σ_2 с дивизором D_2: нужно положить $\sigma_2 = f\sigma_1$, где $(f) = (D_1) - (D_2)$.

Теорема 2.4. *Линейные расслоения над кривой находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами линейной эквивалентности дивизоров на ней. Группа линейных расслоений относительно операции тензорного произведения изоморфна группе классов линейной эквивалентности дивизоров относительно сложения.*

Для доказательства теоремы осталось доказать два утверждения. Во-первых, нам нужно установить, что у каждого линейного расслоения есть мероморфное сечение — это необходимо, чтобы мы могли сопоставить такому расслоению класс линейной эквивалентности дивизоров. Во-вторых, нужно показать, что для каждого дивизора существует линейное расслоение, у которого есть сечение с таким дивизором. Первое утверждение требует использования уже упоминавшейся ранее техники гармонических отображений. Второе более конструктивно. Его доказательство можно провести по индукции, добавляя к дивизору поочередно дополнительные точки. Пусть у нас есть линейное расслоение L над C с сечением σ. На его основе можно сконструировать новое линейное расслоение, которому будет отвечать класс дивизора $(\sigma) + ax$ для заданной точки $x \in C$ и заданной положительной или отрицательной кратности $a \in \mathbf{Z}$. Будем считать для определенности, что точка x входит в дивизор (σ). Это новое линейное расслоение является результатом "подкрутки" расслоения L в точке x. Подкрутка состоит в том, что мы выбираем покрытие кривой C двумя открытыми множествами, первое из которых это $C \setminus \{x\}$, кривая C, проколотая в точке x, а второе — маленький диск с центром в точке x. Эти два открытых множества пересекаются по проколотому диску. Зафиксируем в проколотом диске координату z с центром в точке x, $z(x) = 0$, тривиализирующую расслоение L над диском. Затем вклеим диск обратно с заменой координаты на z^{-a}, где $a - 1$ — изменение кратности точки x в дивизоре. При продолжении в точку x кратность нуля или полюса сечения σ меняется на нужную величину.

Пример 2.5. Тривиальному линейному расслоению отвечает нулевой класс дивизоров. Он состоит из дивизоров мероморфных функций. Класс, отвечающий кокасательному расслоению, называется *каноническим*, тензорным степеням кокасательного расслоения соответствуют *плюриканонические* классы.

Упражнение 2.6. Докажите, что тензорному произведению линейных расслоений соответствует сумма классов линейной эквивалентности дивизоров. Выведите отсюда, что отображение, сопоставляющее линейному расслоению над кривой его класс линейной эквивалентности дивизора, является гомоморфизмом абелевых групп.

Упражнение 2.7. Существует ли над проективной прямой линейное расслоение, отличное от кокасательного, класс дивизора которого совпадает с каноническим?

Упражнение 2.8. Существует ли над проективной прямой линейное расслоение, которому соответствует класс дивизора одной точки с коэффициентом -1? Другими словами, можно ли извлечь квадратный корень из кокасательного расслоения? [**Указание:** Над каждым проективном пространством $\mathbf{CP}^n$ существует выделенное линейное расслоение, обозначаемое $\mathcal{O}(-1)$. Это расслоение строится следующим образом. Проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ представляет собой множество прямых в $\mathbf{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Возьмем в качестве слоя линейного расслоения над $\mathbf{CP}^n$ в точке, представляющей некоторую прямую, саму эту прямую. Точнее говоря, мы рассматриваем линейное расслоение $\mathcal{O}(-1)$ как подрасслоение в тривиальном расслоении $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^{n+1}$, определенное, как выше.]

Упражнение 2.9. Существует ли на эллиптической кривой линейное расслоение, которому соответствует класс дивизора одной точки с коэффициентом -1?

Пример 2.10. Если кривая вложена в проективное пространство, то на ней можно определить класс дивизоров гиперплоского сечения. Представителем этого класса является любой дивизор пересечения кривой с гиперплоскостью, не содержащей этой кривой. Любые два таких дивизора линейно эквивалентны. Действительно, пусть две гиперплоскости задаются однородными линейными уравнениями $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$. Тогда ограничение частного F_1/F_2 на нашу кривую является мероморфной функцией на ней, устанавливающей эквивалентность двух дивизоров. Аналогично, на проективной кривой определен класс дивизоров, отвечающих ее сечениям гиперповерхностями заданной фиксированной степени k.

Степенью дивизора $\sum a_i p_i$ называется сумма $\sum a_i$ его коэффициентов. Это целое число. Ясно, что линейно эквивалентные дивизоры имеют одинаковую степень. Степень класса дивизоров, отвечающего линейному расслоению, называется *степенью расслоения.* Степень дивизора мероморфной функции, а значит и тривиального расслоения, равна нулю. Степень является эпиморфизмом из группы классов дивизоров в группу целых чисел по сложению. Отсюда вытекает, в частности, что классы дивизоров степени 0 образуют подгруппу в группе классов дивизоров.

Упражнение 2.11. Найдите степень канонического дивизора на плоской кривой степени d. Выразите эту степень через род кривой.

Упражнение 2.12. Гиперэллиптической кривой называется комплексная кривая, на которой существует мероморфная функция степени два. Подсчитайте с помощью формулы Римана–Гурвица число точек ветвления у мероморфной функции степени два, имеющей лишь простые точки ветвления, на кривой рода g. Воспользовавшись конструкцией Римана, докажите, что существуют гиперэллиптические кривые произвольного рода. Найдите степени канонического и плюриканонических расслоений над гиперэллиптическими кривыми рода g.

Упражнение 2.13 (Формула Римана–Гурвица для канонических дивизоров). Пусть $f : C_1 \to C_2$ — непостоянное голоморфное отображение степени d двух комплексных кривых, род которых равен, соответственно, g_1 и g_2. Выразите степень канонического класса на кривой C_1 через степень канонического класса на кривой C_2.

3. Линейные системы и отображения кривых

Дивизор $\sum a_i x_i$ называется *эффективным*, если все его коэффициенты a_i положительны, $a_i > 0$ (или неотрицательны, если мы суммируем по всем точкам кривой). Нулевой дивизор также будем считать эффективным. Эффективность дивизора D мы будем выражать записью $D \geq 0$. Эффективные дивизоры образуют конус — их можно складывать и умножать на положительные числа, однако разность двух эффективных дивизоров может быть не эффективным дивизором. Для произвольного линейного расслоения над кривой C и фиксированного дивизора D мы можем рассмотреть множество таких сечений σ этого расслоения, что $(\sigma) + D \geq 0$. Это множество сечений образует векторное пространство относительно естественных операций на сечениях. Таким способом мы значительно расширяем набор векторных пространств, ассоциированных с данной кривой.

Фиксируем произвольный дивизор D на кривой C. Обозначим через $L(D)$ векторное пространство мероморфных функций на C, таких, что $(f) + D \geq 0$. Это векторное пространство конечномерно. Его размерность обозначается через $l(D)$. Выбор базиса в этом пространстве задает отображение кривой в проективное пространство $\mathbf{CP}^{l(D)-1}$. Тем самым, с каждым дивизором на кривой мы связали отображение кривой в проективное пространство. Точно такая же конструкция работает и для произвольного линейного расслоения, не только для тривиального. Поэтому с каждой парой (линейное расслоение, дивизор) ассоциировано отображение кривой в проективное пространство. Каноническая кривая соответствует паре (кокасательное расслоение, нулевой дивизор).

В случае тривиального расслоения проективное пространство, соответствующее заданному дивизору, допускает следующую реализацию. Рассмотрим все эффективные дивизоры, которые линейно эквивалентны дивизору D. Обозначим это множество дивизоров через $|D|$. Оно заведомо пусто, если степень дивизора D отрицательна. Множество $|D|$ естественно отождествляется с проективизацией векторного пространства $L(D)$. Действительно,

$$|D| = \{(f) + D | f \in L(D) \setminus \{0\}\},$$

причем

$$(f) + D = (g) + D \Leftrightarrow g = \lambda f,$$

где λ — ненулевое комплексное число. Размерность проективного пространства $|D|$ равна $l(D) - 1$.

Определение 3.1. *Линейная система* (или *линейный ряд*) на комплексной кривой C это проективное подпространство в $|D|$. Линейная система, совпадающая с $|D|$, называется *полной.*

Пример 3.2. На кривой в проективном пространстве дивизоры гиперплоских сечений образуют линейную систему.

Пример 3.3. Частным случаем предыдущей конструкции является мероморфная функция на кривой (т.е. отображение кривой в проективную прямую). Прообраз любой точки при таком отображении является эффективным дивизором, и все такие дивизоры линейно эквивалентны. Они образуют линейную систему дивизоров на кривой.

Пример 3.4. Канонические дивизоры образуют полную линейную систему.

Все дивизоры, принадлежащие одной линейной системе, имеют одинаковую степень. Это общее значение степени называется *степенью линейной системы.* Линейная система степени d с размерностью проективного пространства n является *линейной системой* g_d^n.

Пример 3.5. Всякая мероморфная функция степени d на кривой определяет линейную систему g_d^1 на ней. В частности, кривая гиперэллиптическая тогда и только тогда, когда на ней существует линейная система g_2^1.

4. Вычеты и интегралы от мероморфных 1-форм

Голоморфная 1-форма ω на комплексной кривой всегда замкнута, $d\omega = 0$. Поэтому интеграл от голоморфной 1-формы по стягиваемой кривой на комплексной кривой равен нулю. Для мероморфных 1-форм последнее утверждение уже неверно. Точнее говоря, оно становится верным, если областью определения мероморфной 1-формы считать комплексную кривую, из которой выколоты полюса этой формы. На такой поверхности маленькая окружность с центром в выколотой точке x_0 уже, как правило, нестягиваема (исключение составляет одна выколотая точка на рациональной кривой). Величина

$$\frac{1}{2\pi i} \int \omega = \mathrm{Res}_{x_0} \omega,$$

где интегрирование идет по такой окружности, проходимой в положительном направлении («против часовой стрелки»), называется *вычетом* 1-формы ω в точке x_0. Если в окрестности точки x_0 введена локальная координата z, то 1-форма ω допускает локальное разложение

$$\omega = \left(a_{-k}z^{-k} + a_{-k+1}z^{-k+1} + \cdots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + \dots\right) dz,$$

и ее вычет совпадает с коэффициентом a_{-1} при z^{-1}.

Упражнение 4.1. Проверьте непосредственной заменой, что коэффициент при z^{-1} не зависит от выбора локальной координаты z.

Все вычеты точной мероморфной 1-формы нулевые.

Теорема 4.2. *Пусть $x_1, \dots, x_d$ — все полюса мероморфной 1-формы ω на компактной кривой C. Тогда $\mathrm{Res}_{x_1}\omega + \cdots + \mathrm{Res}_{x_d}\omega = 0$.*

Доказательство. Действительно, склеим нашу поверхность из одного многоугольника таким образом, чтобы ни один из полюсов не попал на его границу. Тогда сумма вычетов 1-формы ω в ее полюсах равна, с точностью до коэффициента $1/2\pi i$, интегралу от этой 1-формы по циклу, обходящему многоугольник вдоль его границы в положительном направлении. Видно, что в поверхности, склеенной из этого многоугольника, этот цикл гомологичен нулю, поскольку он дважды — в противоположных направлениях — проходит по каждому из своих отрезков.

5. Теорема Римана–Роха

Теорема Римана–Роха связывает две величины: размерность $l(D)$ векторного пространства $L(D)$ функций, дивизор которых не меньше $-D$, и размерность $i(D)$ пространства мероморфных 1-форм, дивизор которых не меньше D.

Теорема 5.1 (Риман–Рох).

$$l(D) = d - g + i(D) + 1.$$

Проще всего доказывать эту теорему в следующем, геометрическом варианте.

Пусть D — эффективный дивизор степени d на кривой C, $D = x_1 + \cdots + x_d$; обозначим через $y_1, \dots, y_d$ образы точек этого дивизора на канонической кривой в $\mathbf{CP}^{g-1}$ (здесь и ниже мы предполагаем известным, что на кривой рода g имеется в точности g линейно независимых голоморфных 1-форм).

Теорема 5.2. *Размерность r полной линейной системы $|D|$ равна полному числу линейно независимых соотношений между точками $y_1, \dots, y_d$; другими словами, точки $y_1, \dots, y_d$ порождают $(d-r-1)$-плоскость.*

Доказательство. Обозначим плоскость, проходящую через точки $y_1, \dots, y_d$, через $\overline{D}$. Докажем сначала, что $\dim\overline{D} \le (d-1) - \dim|D|$. Предположим, что существует $r+1$ линейно независимых мероморфных функций $f_0, \dots, f_r$ на C, таких, что $(f_j)+D \ge 0$. Если положить $f_0 = 1$, то никакая нетривиальная линейная комбинация функций $f_1, \dots, f_r$ не голоморфна на всей кривой C. Для любой голоморфной 1-формы ω на C имеем

$$\mathrm{Res}_{x_1} f_j\omega + \cdots + \mathrm{Res}_{x_n} f_j\omega = 0,$$

что дает r линейно независимых соотношений на точки $y_i = (\omega_1(x_i) : \cdots : \omega_g(x_i))$, где $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — фиксированный базис голоморфных 1-форм на C.

Для доказательства обратного неравенства применим уже полученное неравенство к дивизору $K - D$, где K — канонический дивизор на кривой C. Обозначим размерность плоскости $\overline{D}$ через $d - s - 1$. Всякая гиперплоскость в $\mathbf{CP}^{g-1}$, содержащая точки $y_1, \ldots, y_d$, высекает на канонической кривой некоторое множество точек. Прообраз этого множества при каноническом отображении является линейной системой из $|K - D|$, размерность которой равна

$$(g-1) - (d-s-1) - 1 = g - d + s - 1.$$

Взяв произвольный дивизор $E \in |K - D|$, мы можем применить выведенное выше неравенство к размерности плоскости $\overline{E}$, натянутой на образ этого дивизора в канонической кривой:

$$\begin{aligned} \dim \overline{E} &\leq \deg E - 1 - (g - d + s - 1) \\ &= (2g - 2 - d) - 1 - (g - d + s - 1) \\ &= g - s - 2. \end{aligned}$$

Но гиперплоскости в $\mathbf{CP}^{g-1}$, содержащие плоскость E, высекают на канонической кривой линейную систему из $|D|$, размерность которой равна $(g-1)-(g-s-2)-1 = s$, т.е.

$$\dim |D| \geq s = d - 1 - \dim \overline{D},$$

и формула Римана–Роха доказана.