Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 5. Формула Римана–Роха и следствия из нее.

1. Вокруг формулы Римана–Роха

Упражнение 1.1. Выведите из теоремы Римана–Роха решение задачи Миттаг–Леффлера: для набора главных частей $p_1, \dots, p_n$ в точках $x_1, \dots, x_n$ кривой C мероморфная функция с таким набором главных частей в этих точках, не имеющая других полюсов, существует в том и только в том случае, если

$$\mathrm{Res}_{x_1} p_1\omega + \dots + \mathrm{Res}_{x_n} p_n\omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы ω на C. Здесь под *главной частью* функции в полюсе мы понимаем сумму «членов отрицательной степени» ее разложения в окрестности полюса: главная часть функции, имеющей разложение

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

в окрестности полюса порядка k в произвольной координате z, равна

$$\frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}.$$

Точнее говоря, две функции f_1, f_2 имеют одинаковую главную часть в своем общем полюсе, если их разность $f_1 - f_2$ не имеет полюса. Главной же частью называется класс эквивалентности функций с полюсами относительно такого отношения эквивалентности. Поскольку вычет 1-формы $f\omega$ в полюсе функции f определяется главной частью этой функции, корректно определен и вычет произведения главной части на голоморфную 1-форму.

2. Рациональная кривая

До сих пор мы часто упоминали о том, что проективная прямая $\mathbf{CP}^1$ — единственная комплексная кривая рода нуль. Теорема Римана–Роха позволяет доказать это утверждение.

Теорема 2.1. *Любая гладкая компактная комплексная кривая нулевого рода изоморфна* $\mathbf{CP}^1$.

Доказательство. Возьмем на комплексной кривой нулевого рода дивизор D, состоящий из одной точки x, взятой с кратностью 1. Размерность $i(D)$ пространства мероморфных 1-форм с нулем в точке x равна нулю, поскольку степень канонического дивизора на кривой рода $g = 0$ равна $2g - 2 = -2$. Теорема Римана–Роха дает для размерности пространства $L(D)$ мероморфных функций на такой кривой с полюсом не выше первого порядка в точке x размерность

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 1 - 0 + 0 + 1 = 2.$$

Выбрав в двумерном пространстве $L(D)$ базис из двух функций f_0, f_1, первая из которых константа, $f_0 = 1$, мы получаем мероморфную функцию f_1 на нашей кривой. Степень этой функции равна 1, поскольку у нее один полюс первого порядка, а значит она осуществляет биголоморфное отображение на проективную прямую, что и требовалось.

3. Эллиптические кривые

Мы хотим показать, что всякая эллиптическая кривая представляется плоской кубической кривой.

Теорема 3.1. *Любую эллиптическую кривую, т.е. кривую, гомеоморфную тору, можно вложить в проективную плоскость.*

Из формулы для рода плоской кривой вытекает теперь, что степень вложенной эллиптической кривой равна 3.

Доказательство. Как мы знаем, размерность пространства голоморфных 1-форм на кривой рода 1 равна 1. При этом образующая пространства голоморфных 1-форм не имеет нуля, поэтому на эллиптической кривой нет нетривиальных голоморфных 1-форм с нулями и без полюсов. Вычислим размерность пространства мероморфных функций с фиксированным полюсом не выше первого порядка, не имеющих других полюсов. По теореме Римана–Роха эта размерность равна

$$d - g + i(D) + 1 = 1 - 1 + 0 + 1 = 1,$$

т.е. все такие функции — константы. А вот функции с одним полюсом порядка два существуют. Действительно, для дивизора $D = 2x$ имеем

$$l(D) = d - g + i(D) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Поэтому на эллиптической кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка два в любой наперед заданной точке, не имеющая других полюсов. Поднятие такой функции на комплексную прямую $\mathbf{C}$, как и исходная функция, определено однозначно с точностью до прибавления константы и умножения на константу и сдвига. Одна из этих функций называется *функцией Вейерштрасса*. Это простейшая из *эллиптических функций*.

Функция Вейерштрасса $\mathcal{P}(z)$ выделяется своим разложением при $z = 0$. Она имеет в этой точке полюс порядка 2, а коэффициент при $1/z$ в этом разложении равен 0, поскольку иначе 1-форма $\mathcal{P}(z)dz$ имела бы ненулевой вычет в нуле. Отсюда вытекает, что функция Вейерштрасса четная: иначе функция $\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(-z)$ была бы непостоянной голоморфной функцией на кривой. Добавив к $\mathcal{P}(z)$ при необходимости аддитивную константу, мы можем считать, что разложение в нуле имеет вид

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots.$$

Поскольку функция Вейерштрасса определена на $\mathbf{C}$, определена и ее производная $\mathcal{P}'(z)$, которая также опускается на соответствующую эллиптическую кривую. Производная функции Вейерштрасса имеет разложение

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \dots.$$

Посмотрим теперь на функцию

$$4\mathcal{P}^3(z) - (\mathcal{P}'(z))^2.$$

Это четная функция, а ее разложение в точке $z = 0$ имеет в ней полюс второго порядка. Поэтому эта функция представляется в виде линейной комбинации функции Вейерштрасса и единичной функции. Тем самым, справедливо тождественное равенство

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}^3(z) + a\mathcal{P}(z) + b$$

для некоторых констант a и b. Другими словами, тройка функций $(\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1)$, образующая базис в пространстве $L(3 \cdot 0)$, определяет отображение эллиптической кривой в плоскую кубическую кривую. Поскольку первая из этих функций четна, а вторая нечетна, отображение является взаимно-однозначным на свой образ. Комплексные числа a и b в этом представлении являются параметрами кривой; они зависят от выбранной решетки (т.е. от вектора τ в верхней полуплоскости).

Образ этого отображения задается в аффинной карте $z = 1$ уравнением

$$y^2 = 4x^3 + ax + b.$$

Проекция этой кубической кривой на ось x совпадает с функцией Вейерштрасса на эллиптической кривой, а проекция на ось y — с ее производной.

Упражнение 3.2. Проверьте, что для любых двух точек на эллиптической кривой существует мероморфная функция степени 2, имеющая в этих точках полюса первого порядка. Выразите эту функцию через функцию Вейерштрасса.

Упражнение 3.3. Верно ли, что любой дивизор степени нуль на эллиптической кривой является а) главным (т.е. дивизором некоторой мероморфной функции); б) каноническим (т.е. дивизором некоторой мероморфной 1-формы)?

4. Гиперэллиптические кривые и кривые рода 2

Напомним, что каноническим отображением кривой C рода ≥ 2 называется ее отображение $\varphi : x \mapsto (\omega_1(x) : \cdots : \omega_g(x))$ в проективное пространство $\mathbf{CP}^{g-1}$, заданное выбором базиса $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ в пространстве голоморфных 1-форм на C.

Докажем сначала, что не существует такой точки на кривой C, в которой все голоморфные 1-формы обращаются в нуль одновременно. Действительно, если бы такая точка x существовала, то, по теореме Римана–Роха, существовала бы мероморфная функция на C с полюсом первого порядка в этой точке (и без других полюсов):

$$l(x) = 1 - g + i(x) + 1 = 2, \text{ поскольку } i(x) = g.$$

Это означало бы, что наша кривая рациональна.

Теорема 4.1. *Если*

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

для двух различных точек x_1, x_2 кривой C, то эта кривая гиперэллиптическая, т.е. на ней существует мероморфная функция степени 2.

Доказательство. Поскольку значения голоморфных 1-форм в точке x_2 пропорциональны их значениям в точке x_1 с коэффициентом пропорциональности, общим для всх 1-форм, размерность пространства голоморфных 1-форм с нулем в точке x_1 совпадает с размерностью пространства голоморфных 1-форм с нулями в точках x_1, x_2. Поэтому теорема Римана–Роха дает значение 2 для размерности пространства мероморфных функций с полюсами не выше первого порядка в точках x_1, x_2:

$$2 - g + (g - 1) + 1 = 2.$$

Тем самым, существует такая непостоянная мероморфная функция, а ее степень равна 2.

Упражнение 4.2. Верно ли, что на гиперэллиптической кривой каноническое отображение имеет степень 2?

Упражнение 4.3. Докажите, что если для двух точек x_1, x_2 на кривой (которая в этом случае с необходимостью является гиперэллиптической) существует функция с полюсами первого порядка в этих точках и без других полюсов, то каноническое отображение переводит эти две точки в одну.

Теорема 4.4. *Всякая комплексная кривая рода* 2 *гиперэллиптична.*

Доказательство. Каноническое отображение кривой рода 2 является разветвленным накрытием проективной прямой, поэтому не может быть изоморфизмом на образ, значит кривая гиперэллиптична.

Упражнение 4.5. Всякая мероморфная функция степени 2 на комплексной кривой определяет на этой кривой инволюцию: автоморфизм второго порядка, переставляющий местами прообразы каждой точки из $\mathbf{CP}^1$. Неподвижные точки этой инволюции — критические точки функции. Найдите размерность пространства $L(D)$ мероморфных функций на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ для случаев а) $D = 2x$, где x — неподвижная точка инволюции; б) $D = 2x$, где x не является неподвижной точкой инволюции; в) $D = x_1 + x_2$, где точки x_1, x_2 образуют орбиту инволюции; г) $D = x_1 + x_2$, где точки x_1, x_2 не образуют орбиту инволюции.

5. Вычисление Римана

Теорема Римана–Роха позволяет подсчитать — по крайней мере грубо — размерность пространства кривых данного рода. Мы знаем размерность пространства кривых рода 0 — она равна нулю, и размерность пространства кривых рода 1 — она равна 1. Соответствующее вычисление для кривых рода $g \geq 2$ проделано Риманом.

Рассмотрим пространство мероморфных функций степени d на кривых рода g. У общей функции из этого пространства все точки ветвления простые. По формуле Римана–Гурвица число этих простых точек ветвления равно $2d+2g-2$. Это означает, что *размерность пространства мероморфных функций степени d на кривых рода g равна* $2d + 2g - 2$. Действительно, теорема Римана показывает, что число мероморфных функций с фиксированными точками ветвления и заданными в них порядками ветвления конечно, поэтому пространство таких функций локально параметризуется их точками ветвления. А значит, его размерность равна размерности пространства таких точек.

Тем самым, мы знаем размерность пространства мероморфных функций с d полюсами порядка не выше первого на кривых произвольного рода g. С другой стороны, мы можем подсчитать, по теореме Римана–Роха, размерность пространства таких функций на каждой отдельной кривой рода g. При $d \geq 2g$ эта размерность равна $2d - g + 1$. Действительно, у голоморфного дифференциала на кривой рода g имеется $2g - 2$ нулей, поэтому $i(D) = 0$ для любого дивизора D степени, не меньшей $2g - 1$. Группа автоморфизмов кривой рода g (а, значит, и пространства мероморфных функций на ней) конечна. Поэтому размерность пространства кривых рода $g \geq 2$ равна

$$(2d + 2g - 2) - (2d - g + 1) = 3g - 3.$$

Естественный способ сделать подобную формулу «общей», т.е. распространить ее также на кривые рода 0 и 1, состоит в том, чтобы сделать эти кривые «жесткими», «убив» их непрерывные автоморфизмы. Такой эффект достигается, если рассматривать кривые с отмеченными точками. Отметим на кривой n точек $x_1, \ldots, x_n$, и будем считать две кривые с отмеченными точками изоморфными, если существует биголоморфное отображение одной из них на другую, переводящее отмеченные точки в отмеченные.

Замечание 5.1. Существует два варианта этой конструкции. В первом отмеченные точки различаются между собой, во втором они неразличимы. Соответственно, в первом варианте изоморфизмами считаются такие биголоморфизмы, которые переводят каждую отмеченную точку в точку с такой же отметкой, а во втором изоморфизм может переставлять отмеченные точки. В дальнейшем мы будем рассматривать только первый вариант.

На кривых рода $g \geq 2$ добавление очередной отмеченной точки повышает размерность пространства таких кривых на единицу: размерность пространства кривых рода g с n отмеченными точками равна $3g - 3 + n$. Это утверждение верно и для кривых младших родов, однако начиная с некоторого количества добавленных точек. Эллиптические кривые ($g = 1$) приобретают жесткость уже при добавлении одной отмеченной точки, и размерность пространства таких кривых с n отмеченными точками равна $3g - 3 + n = n$ при $n \geq 1$. Для того, чтобы стала жесткой рациональная кривая, на ней надо отметить три точки: для любых двух упорядоченных троек точек на рациональной кривой существует единственный автоморфизм кривой, переводящий первую точку во вторую с сохранением порядка. При $n \geq 3$ размерность пространства рациональных кривых с n отмеченными точками также равняется $3g - 3 + n = n - 3$. Локальными координатами на этом пространстве могут служить координаты точек $x_4, \ldots, x_n$ относительно координаты, в которой $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

6. Гиперэллиптические кривые и кривые рода 3

Теперь нетрудно усмотреть, что не всякая кривая рода 3 является гиперэллиптической. Действительно, на всякой гиперэллиптической кривой рода g существует мероморфная функция степени 2. По формуле Римана–Гурвица, у такой функции $2g + 2$ простых критических значений. На пространстве критических значений действует группа дробно-линейных преобразований образа, размерность которой равна 3. Функции, переходящие друг в друга при такой замене, определены на одной и той же ги-

перэллиптической кривой. Поэтому пространство гиперэллиптических кривых рода g имеет размерность $2g-1$.

При $g=2$ размерность $2g-1=3$ пространства гиперэллиптических кривых совпадает с размерностью $3g-3=3$ пространства всех кривых, что согласуется с доказанным нами ранее утверждением о том, что всякая кривая рода 2 гиперэллиптическая. При $g=3$ размерность пространства всех кривых равна $3g-3=6$, тогда как гиперэллиптические кривые лишь образуют подмногообразие размерности $2g-1=5$, т.е. гиперповерхность, в этом пространстве.

Плоская кривая степени $d=4$ имеет род $(d-1)(d-2)/2=3$. Посмотрим, всякая ли кривая рода 3 реализуется таким образом. Каноническое отображение отправляет кривую рода 3 в плоскость. На негиперэллиптических кривых каноническое отображение является изоморфизмом на образ, поэтому всякая негиперэллиптическая кривая рода 3 вкладывается в плоскость. Степень образа канонического отображения равна 4, поскольку иначе этот образ представлял бы кривую другого рода.

Упражнение 6.1. Вычислите размерность пространства гладких плоских кривых степени 4 и проверьте тем самым, что почти всякая такая кривая является образом канонического отображения кривой рода 3.

Упражнение 6.2. Докажите, что не всякая комплексная кривая рода 10 реализуется как плоская кривая.