Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 6. Голоморфные формы на неплоских кривых и точки Вейерштрасса

1. Вложения и погружения комплексных кривых

До сих пор мы пользовались утверждением о том, что пространство голоморфных дифференциалов на кривой рода g g-мерно, однако его доказательство было приведено только для плоских кривых. Докажем теперь это утверждение для произвольных кривых.

Напомним, что под комплексной кривой мы понимаем класс биголоморфной эквивалентности гладких кривых в проективных пространствах. Тем самым, всякая кривая вложена в некоторое проективное пространство. Мы хотим доказать следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Всякую кривую можно вложить в трехмерное проективное пространство.*

Доказательство. Если кривая является проективной прямой или она уже вложена в проективную плоскость или в проективное пространство, то все доказано. Докажем теперь, что кривую, вложенную в проективное пространство размерности, большей 3, можно спроектировать в пространство на единицу меньшей размерности, причем образ будет гладкой кривой, а проекция — взаимно-однозначной на образ.

Пусть $C \subset \mathbf{CP}^n$ — кривая, $n \geq 4$. Сопоставим этой кривой многообразие ее хорд — подмногообразие в $\mathbf{CP}^n$, представляющее собой замыкание объединения прямых, соединяющих две точки кривой (в это замыкание попадают и точки касательных к кривой). Подмногообразие хорд не более, чем трехмерно, поскольку его точки параметризуются тремя параметрами: двумя точками кривой и точкой проходящей через них прямой. Поэтому оно не совпадает со всем объемлющим проективным пространством $\mathbf{CP}^n$. Тем самым, в проективном пространстве есть точка, не лежащая в подмногообразии хорд. Проекция из этой точки отображает кривую C в проективное пространство $\mathbf{CP}^{n-1}$, причем оно взаимнооднозначно на образ этой кривой.

Следующее упражнение завершает доказательство.

Упражнение 1.2. Докажите, что образ кривой C при таком проектировании является гладкой кривой.

Замечание 1.3. Как само утверждение, так и его доказательство, совпадают. по существу, с теоремой Уитни о вложимости k-мерного многообразия в $2k+1$-мерное пространство и ее доказательством.

Мы, однако, умеем подсчитывать размерность пространства голоморфных дифференциалов для плоских, а не для пространственных кривых. С другой стороны, не всякая кривая вкладывается в плоскость. Обойти это противоречие можно, воспользовавшись комплексным вариантом теоремы Уитни о погружении.

Теорема 1.4. *Всякую комплексную кривую C можно отобразить в проективную плоскость $\mathbf{CP}^2$ таким образом, что у образа кроме гладких точек есть лишь точки простого (т.е. двукратного) трансверсального самопересечения, на дополнении к* *этим точкам отображение локально биголоморфно, а у каждой двойной точки два прообраза.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, кривая C допускает вложение в комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^3$. Подберем в этом пространстве такую точку, проекция из которой при ограничении на C взаимнооднозначна и биголоморфна на образ всюду, за исключением конечного числа точек образа, имеющих два прообраза, причем две ветви образа в этих точках пересекаются трансверсально. Такая точка действительно существует: достаточно взять ее не лежащей на двумерном подмногообразии в $\mathbf{CP}^3$, состоящем из нескольких компонент:

- объединение касательных прямых к кривой C;
- объединение «особых» хорд, т.е. хорд, на которых лежат больше двух точек кривой C, а также хорд, проходящих через такие две точки кривой C, что подпространство, натянутое на касательные вектора в них и саму хорду двумерно.

Проекция из такой точки обладает требуемыми свойствами.

Пусть теперь образ кривой C при погружении в плоскость является кривой степени d с δ двойными точками. Найдем род кривой C по этим данным. Предположим, что погруженная кривая задается уравнением $f = 0$ в карте $z = 1$, причем обе касательные в каждой двойной точке невертикальны. По теореме Безу число точек пересечения погруженной кривой с кривой, заданной уравнением $\partial f/\partial y = 0$ равно $d(d-1)$.

Упражнение 1.5. Сформулируйте и докажите теорему Безу для кривых с простыми самопересечениями.

С другой стороны, каждая из двойных точек является общим нулем кривой $f = 0$ и кривой $\partial f/\partial y = 0$, поэтому точками ветвления проекции на ось x (т.е. точками с вертикальными касательными) являются лишь те точки пересечения, которые отличны от двойных точек. Их число равно $d(d-1) - 2\delta$ (каждая точка пересечения считается два раза, поскольку в ней кривая $\partial f/\partial y = 0$ пересекает две ветви погруженной кривой). По формуле Римана– Гурвица имеем

$$d(d-1) - 2\delta = 2d + 2g - 2,$$

откуда

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta.$$

Теперь мы можем выводить формулу для размерности пространства голоморфных форм на кривой, действуя аналогично случаю вложенной кривой. Заметим сначала, что если на кривой есть хотя бы одна двойная точка и наша кривая не является парой пересекающихся прямых, то ее степень не меньше 3: прямая, проведенная через эту двойную точку пересекает нашу кривую еще по крайней мере в одной точке. Поэтому далее мы будем предполагать, что $d \geq 3$.

Докажем, что размерность пространства голоморфных 1-форм на C не меньше g. Поскольку доказательство оценки в противоположную сторону не требовало вложимости кривой в плоскость, теорема будет доказана в полной общности. Выберем на плоскости прямую, пересекающую погруженную кривую в d различных точках, и зафиксируем систему координат таким образом, чтобы эта прямая задавалась уравнением $z = 0$. Пусть $F(x, y, z) = 0$ — однородное уравнение погруженной кривой, а

$f(x, y) = 0$ — ее уравнение в карте $z = 1$. Обозначим через Γ набор двойных точек погруженной кривой и через $S^{d-3}(-\Gamma)$ пространство однородных многочленов степени $d-3$ от трех переменных, обращающихся в нуль в точках множества Γ. (Здесь главное отличие от случая вложенной кривой: там мы рассматривали все многочлены степени $d-3$.)

Сопоставим однородному многочлену $G(x, y, z)$ следующую дифференциальную 1-форму на погруженной кривой:

$$G \mapsto (G dx \wedge dy \wedge dz)/(dx + dy + dz))/dF.$$

Это отображение действительно сопоставляет многочлену G голоморфную 1-форму: в двойных точках кривой и числитель, и знаменатель обращаются в нуль одновременно. Как и в случае вложенной кривой, это отображение является линейным инъективным отображением векторных пространств, а значит размерность пространства голоморфных 1-форм на C не меньше размерности пространства однородных многочленов степени $d-3$ от трех переменных, обращающихся в нуль в заданных δ точках.

Упражнение 1.6. Найдите размерность пространства плоских кривых степени 4 с одной простой двойной точкой.

Упражнение 1.7. Докажите, что всякая кривая рода два допускает погружение в проективную плоскость в качестве кривой степени 4 с одной простой двойной точкой.

Упражнение 1.8. Оцените степень плоских кривых (с двойными точками), необходимую для того, чтобы представить любую кривую заданного рода g.

2. Точки Вейерштрасса

Группа автоморфизмов кривой рода $g \geq 2$ конечна, поэтому, в отличие от случая малого рода, две случайно взятые точки такой кривой, как правило, не эквивалентны между собой: не существует изоморфизма кривой, переводящего первую точку во вторую. Посмотрим, какие численные характеристики можно сопоставить точке x комплексной кривой C.

Для любого натурального числа k посмотрим на размерность $l(kx)$ пространства мероморфных функций с полюсом порядка не выше k в точке x, не имеющих других полюсов. Эта размерность связана с размерностью $i(kx)$ пространства голоморфных 1-форм с нулем не ниже k-го порядка в точке x формулой Римана–Роха

$$l(kx) = k - g + i(kx) + 1.$$

При $k \geq 2g-1$ значение $i(kx)$ равно нулю, поскольку ненулевая голоморфная 1-форма не может иметь нулей порядка выше $2g-2$. Поэтому при таких k имеем $l(kx) = k-g+1$ для любой точки x. Тем самым, точки кривой не различаются значением $l(kx)$ при $k \geq 2g-1$. Ситуация, однако, разительно меняется, если мы будем смотреть на функцию $l(kx)$ при $k \leq 2g-2$.

Упражнение 2.1. Докажите, что $l(x) = 1$ для любой точки x кривой C положительного рода.

Упражнение 2.2. Докажите, что на кривой рода $g \geq 1$ точка x, для которой $l(2x) = 2$, существует в том и только в том случае, если эта кривая гиперэллиптическая. Докажите, что на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ таких точек по крайней мере $2g+2$.

Тем самым мы связали с каждой точкой x комплексной кривой C последовательность натуральных чисел $l(x), l(2x), l(3x), \dots, l(kx)$. При $g > 0$ эта последовательность начинается с 1, и начиная с $k = 2g - 1$ она совпадает с линейной последовательностью $k - g + 1$.

Значение $l(kx)$ может либо совпадать со значением $l((k-1)x)$, либо быть больше последнего на 1. Второй случай реализуется, если на кривой существует мероморфная функция с полюсом порядка в точности k в точке x, не имеющая других полюсов. Поскольку первый элемент последовательности равен 1, а элемент с номером $2g - 1$ равен g, среди первых $2g - 1$ ее элементов есть в точности g, на которых скачка не происходит. Рассмотрим последовательность $a_1, \dots, a_g$ из этих g номеров, $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_g \leq 2g - 1$. Они называются *лакунами.*

Пример 2.3. Найдем, например, последовательность лакун в точке x на гиперэллиптической кривой, в которой $l(2x) = 2$. Поскольку на кривой существует мероморфная функция с полюсом второго порядка в точке x, на ней существуют и функции с полюсами порядков $4, 6, 8, \dots$ — в качестве таковых можно взять подходящие степени функции с полюсом второго порядка. Тем самым, все четные значения не являются лакунами. Это означает, что значения $1, 3, 5, \dots, 2g-1$ являются лакунами: в противном случае лакун было бы меньше, чем g.

Упражнение 2.4. Докажите, что множество *нелакун* (т.е. таких натуральных чисел k, что существует мероморфная функция с полюсом в точности k-го порядка в точке x), образует полугруппу: вместе с любыми двумя элементами k_1, k_2 оно содержит их сумму $k_1 + k_2$.

Упражнение 2.5. Выведите из предыдущего упражнения *теорему Клиффорда*: если кривая C негиперэллиптическая, то для любой точки $x \in C$ имеет место неравенство $l(kx) < \frac{k}{2} + 1$ при $k = 1, \dots, 2g - 1$.

В общей точке кривой C имеем $a_i = i$, при $i = 1, \dots, g$, т.е. подскоки начинаются с $(g+1)$-го элемента. Если это не так, т.е. $l(kx) = 2$ для некоторого $k < g$, то точка x называется *точкой Вейерштрасса.* Точка, в которой лакуны имеют вид

$$1, 2, 3, \dots, g-1, g+1,$$

называется *нормальной* точкой Вейерштрасса.

Зафиксируем теперь на C базис из голоморфных 1- форм и некоторую координату z в окрестности точки x. Пусть базисные 1-формы в этой координате записываются в виде $\varphi_1(z)dz, \dots, \varphi_g(z)dz$. Назовем *весом* точки x порядок нуля в ней функции

$$W(z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & \dots & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & \dots & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{vmatrix}.$$

Упражнение 2.6. Докажите, что точка x является точкой Вейерштрасса в том и только в том случае, если ее вес больше нуля.

Упражнение 2.7. Докажите, что сумма весов всех точек Вейерштрасса на кривой рода g равна $(g-1)g(g+1)$.

Упражнение 2.8. Докажите, что число точек Вейерштрасса на любой кривой конечно.

Упражнение 2.9. Докажите, что вес любой точки равен $\sum_{i=1}^{g}(a_i - i)$, где суммирование идет по всем лакунам этой точки.

Упражнение 2.10. Найдите число точек Вейерштрасса на гиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$.

Упражнение 2.11. Докажите, что на негиперэллиптической кривой рода $g \geq 2$ есть по крайней мере $2g + 6$ точек Вейерштрасса.