Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Задачи к экзамену, весна 2005 года.

Решения задач и вопросы по условиям (записанные латиницей или представленные в виде ps-файла) можно высылать по адресу lando@mccme.ru. Решение всех предложенных задач не является обязательным условием получения отличной оценки. Процесс проверки будет итеративным.

1. Приведите пример негиперэллиптической кривой (с доказательством того, что она действительно негиперэллиптична).
2. Докажите, что образом гиперэллиптической кривой при каноническом отображении является проективная прямая. Чему равна степень этого отображения?
3. Опишите группу классов дивизоров эллиптической кривой относительно рациональной эквивалентности.
4. Пусть $(C; x_1, \dots, x_n)$ — гладкая стабильная кривая рода g с n отмеченными точками. Рассмотрим пространство мероморфных 1-форм на C, не имеющих полюсов выше первого порядка, все полюса которых расположены в отмеченных точках. Пусть M — его размерность. Рассмотрим отображение кривой C в проективизацию этого пространства, заданное выбором некоторого базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ в нем, $x \mapsto (\alpha_1 : \dots : \alpha_M)$. Докажите, что для любого значения g существует такое число N, что при всех $n \geq N$ построенное отображение является вложением для любой кривой C.
5. Пусть C — гладкая кривая рода g степени d в проективном пространстве $\mathbf{CP}^n$, не лежащая ни в какой гиперплоскости. Докажите, что $d \geq n + g$.
6. Опишите комбинаторно стратификацию пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{2;1}$ стабильных кривых рода 2 с одной отмеченной точкой по типам вырождения кривых, указав примыкания стратов.
7. Действуя по аналогии с конструкцией поверхности $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$, дайте геометрическое описание орбиповерхности $\overline{\mathcal{M}}_{1;2}$. (Это описание должно, например, позволять вычислить ее орбифолдную эйлерову характеристику.)