Кривые Веронезе, когерентные состояния и алгебраическая геометрия

3◇1 (кривые Веронезе). Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V_1)$ пространства линейных форм $\alpha(z) = \alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1$ на двумерном комплексном векторном пространстве и аналогичную проективизацию $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V_n)$ пространства однородных полиномов степени n от z_0, z_1. Условимся записывать такой полином в виде $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \binom{\nu}{n} z_0^{n-\nu} z_1^{\nu}$ и использовать a_ν как однородные координаты на $\mathbb{P}_n$. Отображение Веронезе $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{v_n} \mathbb{P}_n$ переводит линейную форму $\alpha \in V_1$ в $\alpha^n \in V_n$. Его образ $C_n = v_n(\mathbb{P}_1) \subset \mathbb{P}_n$ называется *кривой Веронезе*[1] степени n. Задайте кривую Веронезе явными параметрическими уравнениями.

а) Лежит ли C_n в какой-нибудь гиперплоскости?

б) Как устроена проекция C_n из точки $p \in C_n$ на гиперплоскость $\mathbb{P}_{n-1} \not\ni p$?

в) Покажите, что любая кривая на $\mathbb{P}_2$, допускающая рациональную параметризацию, является плоской проекцией кривой Веронезе.

г*) Задайте кривую Веронезе явными квадратичными уравнениями[2].

д*) Зафиксируем в $\mathbb{P}_n$ набор из n точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и ещё три точки a, b, c, так что никакие $(n+1)$ из всех этих $(n+3)$ точек не лежат в одной гиперплоскости. Для каждого i рассмотрим пучок[3] ℓ_i, образованный всеми гиперплоскостями, проходящими через $(n-2)$-мерную плоскость, натянутую на $(n-1)$ точек p_ν с $\nu \neq i$. Отождествим эти пучки между собой при помощи дробно-линейных изоморфизмов $\varphi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$, переводящий три плоскости j-того пучка, проходящие через точки a, b, c, в соответствующие три плоскости i-того пучка. Проверьте, что эти отождествления согласованы в том смысле, что $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ и опишите ГМТ заметаемое точкой пересечения соответственных гиперплоскостей:

$$\bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \varphi_{12}(H) \cap \varphi_{13}(H) \cap \ldots \cap \varphi_{1n}(H)$$

е*) Покажите, что для любых $(n+3)$ точек $p_1, p_2, \ldots, p_n, a, b, c \in \mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, существует линейная замена координат в $\mathbb{P}_n$, переводящая *все* эти точки на кривую Веронезе C_n, причём любые две такие замены различаются на преобразование $S^n U^*$, индуцированное линейной заменой координат z_0, z_1 (т. е. на оператор из SL_2 действующий на $S^n U^*$ как в прошлом листке).

3◇2 (когерентные состояния). Когерентным состоянием в пространстве состояний $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V_n)$ (проективизации $(n+1)$-мерного неприводимого представления V_n алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) называется любая точка из SL_2-орбиты старшего вектора. Убедитесь, что множество когерентных состояний — это в точности кривая Веронезе $C_n \subset \mathbb{P}_n$.

а) Найдите дисперсии наблюдаемых σ_1/n, σ_2/n, σ_3/n (из предыдущего листка) на старшем векторе и на любом когерентном состоянии и найдите их пределы при $n \to +\infty$.

б) Опишите все (не обязательно когерентные) состояния, на которых сумма дисперсий наблюдаемых σ_1/n, σ_2/n, σ_3/n минимальна.

---

[1] а также скрученной рациональной кривой

[2] ответ: $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = 1$

[3] *пучком* (в этом контексте) называется семейство фигур, линейно зависящих от параметра $\lambda \in \mathbb{P}_1$; например, ясно, что уравнение гиперплоскости, проходящей через через $(n-2)$-мерную плоскость, заданную парой линейно независимых уравнений $\alpha(x) = \beta(x) = 0$, имеет вид $\lambda_0\alpha(x) + \lambda_1\beta(x) = 0$, где $\lambda \in \mathbb{P}_1$, так что такие гиперплоскости составляют пучок

в) Найдите $\mathrm{tr}\,(\varrho_p\varrho_q)$ — след произведения ортогональных проекторов на когерентные состояния $p,q\in C_n\subset\mathbb{P}_n$ как функцию от p,q,n. Чему равен её предел при $n\to+\infty$ как «функция» на $C_n\times C_n=\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$?

3◇3 (аффинная алгебраическая геометрия). Каждой конечнопорождённой коммутативной алгебре без нильпотентов[4] A над полем $\mathbb{C}$ можно сопоставить множество *точек* $Spec_m A$, которыми, по определению, являются *комплексные гомоморфизмы вычисления*, т.е. гомоморфизмы алгебр $A\xrightarrow{\mathrm{ev}_p}\mathbb{C}$, переводящие единицу в единицу[5]. Поскольку всякий такой гомоморфизм однозначно определяется своим ядром $\mathfrak{m}_p\overset{\text{def}}{=}\ker\mathrm{ev}_p$ и представляет собой факторизацию $A\xrightarrow{\mathrm{ev}_p}\!\!\!\!\rightarrow A/\mathfrak{m}_p=\mathbb{C}$, то $Spec_m A$ можно описать как *множество идеалов* $\mathfrak{m}_p\subset A$, таких что $A/\mathfrak{m}_p=\mathbb{C}$ (убедитесь, что это в точности множество всех *максимальных*[6] идеалов).

а) Установите явные биекции между точками аффинной прямой $\mathbb{A}_1\simeq\mathbb{C}$, гомоморфизмами вычисления $\mathbb{C}[x]\longrightarrow\mathbb{C}$ и максимальными идеалами $\mathfrak{m}\subset\mathbb{C}[x]$.

б*) Имеются ли биекции между точками отрезка $[\,0\,,\,1\,]\subset\mathbb{R}$, максимальными идеалами алгебры C *непрерывных* функций $[\,0\,,\,1\,]\longrightarrow\mathbb{R}$ и гомоморфизмами вычисления $C\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{R}$?

в) (топология Зарисского) По определению, базой открытых множеств *топологии Зарисского* на $Spec_m A$ являются множества вида $\mathcal{D}_a\overset{\text{def}}{=}\{p\,|\;a(p)\neq 0\}$, где $a\in A$ и $a(p)=\mathrm{ev}_p(a)=a\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_p)\in\mathbb{C}$ есть *значение* $a\in A$ в $p\in Spec_m A$. Проверьте, что это действительно база топологии (хотя бы на $\mathbb{A}_1$) и опишите все открытые и замкнутые множества Зарисского на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$. Верно ли, что *любое* открытое (по Зарисскому) подмножество прямой имеет вид $\mathcal{D}_a$? А на плоскости $\mathbb{A}_2=Spec_m\mathbb{C}[x,y]$?

г) Покажите, что $\mathbb{A}_2=\mathbb{A}_1\times\mathbb{A}_1$ (как множество), но топология Зарисского на $\mathbb{A}_2$ *тоньше*[7], чем произведение топологий Зарисского на $\mathbb{A}_1$.

д) Покажите (хотя бы для $\mathbb{A}_1$), что топология Зарисского *квазикомпактна*: любое открытое покрытие любого открытого подмножества в $Spec_m A$ содержит конечное подпокрытие.

е) (структурный пучок) Функция $U\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ на открытом (по Зарисскому) множестве $U\subset Spec_m A$ называется *регулярной*, если $\forall\,p\in U\;\;\exists\,a,b\in A$: $b(p)\neq 0$ и $f(x)=a(x)/b(x)$ $\forall\;x\in\mathcal{D}_b\cap U$. Алгебра регулярных функций на U обозначается $\mathcal{O}\,(U)$ или $\Gamma(U,\mathcal{O}\,)$; сопоставление $U\longmapsto\mathcal{O}\,(U)$ называется *пучком регулярных функций*. Проверьте (хотя бы для $\mathbb{A}_1$), что $\mathcal{O}\,(\mathcal{D}_a)=A[a^{-1}]$ и $\mathcal{O}\,(Spec_m A)=A$.

ж) (регулярные функции на $\mathbb{P}_1$) Функция $\mathbb{P}_1\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ называется регулярной, если у каждой точки есть открытая (по Зарисскому) окрестность (содержащаяся в одной из аффинных карт), где эта функция регулярна (с точки зрения этой карты). Проверьте, что это определение корректно (не зависит от выбора карты) и убедитесь, что $\mathcal{O}\,(U)$ состоит из всех функций $U\xrightarrow{f}\mathbb{C}$, для которых $\forall\,p\in U$ существуют однородные многочлены *одинаковой* степени $g(z_0,z_1)$, $h(z_0,z_1)$ (где $z=(z_0:z_1)$ суть однородные координаты на $\mathbb{P}_1$), такие что $h(p)\neq 0$ и $f(z)=g(z)/h(z)$ для всех $z\in U$, в которых $h(z)\neq 0$.

з) Убедитесь, что $\mathcal{O}\,(\mathbb{P}_1)=\mathbb{C}$ и всякое регулярное[8] отображение $\mathbb{P}_1\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Spec_m A$ стягивает $\mathbb{P}_1$ в одну точку.

---

[4] по определению, конечнопорождённая коммутативная алгебра — это алгебра $A=\mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]/I$, где $I\subset\mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ — некоторый идеал; классы $a_i\overset{\text{def}}{=}x_i\,(\mathrm{mod}\,I)$ называются *образующими*, а I называется *идеалом соотношений* (поскольку $f(a_i)=0$ в $A\;\;\forall f\in I$); отсутствие *нильпотентов* означает, что $a^m=0\Rightarrow a=0$ в A $\forall\,m\in\mathbb{N}$; в терминах I это равносильно условию: $f^m\in I\Rightarrow f\in I$ в $\mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]\;\;\forall f\in\mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $\forall\,m\in\mathbb{N}$; такие идеалы называются *радикальными*

[5] интуитивно, каждый такой гомоморфизм вычисляет значение функций $a\in A$ в некоторой точке $p\in Spec_m A$

[6] собственный идеал $\mathfrak{m}$ называется *максимальным*, если идеал порождённый им и любым элементом $a\notin\mathfrak{m}$ совпадает со всей алгеброй A

[7] т.е. её открыте и/или замкнутые множества не порождаются произведениями таковых на $\mathbb{A}_1$

[8] напомним, что отображение многообразий $X\xrightarrow{\varphi}Y$ называется *регулярным* если для любой локальной регулярной функции $Y\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ композиция $f\circ\varphi$ является локальной регулярной функцией на X