Задачи по алгебре. 1 курс. 8 февраля 2005 г.

1) Найти порядок стационарной группы вершины для группы вращений а) диэдра; б) тетраэдра; в) куба; г) октаэдра; д) икосаэдра; е) додекаэдра.
2) Под группой многогранника мы будем понимать группу *вращений* многогранника. Найти порядок а) группы диэдра; б) группы тетраэдра; в) группы куба; г) группы икосаэдра.
3) Сколько существует различных ожерелий из 6 бусин, каждая из которых может быть красного, синего или желтого цвета?
   (Указание: использовать формулу Бернсайда).
4) Доказать, что если порядок любого неединичного элемента группы G равен двум, то группа G — абелева. Привести пример такой группы более чем из двух элементов.
5) Пусть G — произвольная группа, $a, b \in G$, причем порядок их произведения ab равен n. Каким может быть порядок элемента ba?
6) Доказать, что
   а) группа диэдра D_3 изоморфна симметрической группе S_3;
   б) группа тетраэдра T изоморфна знакопеременной группе A_4;
   в) группа куба C изоморфна симметрической группе S_4;
   г) группа икосаэдра I изоморфна знакопеременной группе A_5.
7) Найти классы сопряженных элементов для а) группы диэдра D_n; б) симметрической группы S_n.
8) Найти все группы а) ровно с двумя классами сопряженности; б) ровно с тремя классами сопряженности.
9) Обозначим через C группу вращений куба с вершинами в точках $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Пусть T — группа вращений тетраэдра с вершинами в точках $(-1,-1,-1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ и $(-1,1,1)$. Доказать, что T — нормальная подгруппа группы C.
10) Пусть N и M — две нормальные подгруппы группы G, причем $N \cap M = \{e\}$. Доказать, что $ab = ba$ для любых $a \in N$, $b \in M$.
11) Доказать, что если произведение двух любых левых смежных классов группы G по подгруппе H снова является левым смежным классом, то H — нормальная подгруппа в G.
12) Доказать, что для любой группы G группа ее внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} G$ является нормальной подгруппой группы всех автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$.
13) Найти порядок группы $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p)$, где p — простое число.
14) Найти порядок группы $\operatorname{Aut}(\operatorname{Aut}(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_8)))$.
15) Для каких n естественный гомоморфизм $S_n \to \operatorname{Int}(S_n)$ является изоморфизмом?
16) Найти $\operatorname{Aut}(S_n)/\operatorname{Int}(S_n)$ при а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$; д) $n = 7$; е) $n \geqslant 8$.