Задачи по алгебре. 1 курс. 15 февраля 2005 г.

1) Найти положительный и отрицательный индексы инерции
   а) квадратичной функции $q(A) = \operatorname{tr} A^2$ на пространстве $M_n(\mathbb{R})$;
   б) квадратичной функции $q(A) = \operatorname{tr}(A\overline{A})$ на пространстве $M_n(\mathbb{C})$, рассматриваемом как вещественное линейное пространство.
2) Найти в $\mathbb{C}^n$ подпространство размерности $[n/2]$, на котором билинейная форма $B(x,y) = \sum x_i y_i$ тождественно равна нулю.
3) а) Пусть f — невырожденная билинейная форма на n-мерном пространстве V. Подпространство $W \subseteq V$ называется изотропным, если ограничение f на W равно нулю. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства?
   б) Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная форма, а основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства?
   в) Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная форма, а основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства в зависимости от индексов инерции формы f?
4) Сопоставим каждому (неориентированному) графу Γ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ квадратичную функцию $q_\Gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, положив
$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j, \\ -1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром,} \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром.} \end{cases}$$
   а) Доказать, что если функция q_Γ положительно определена, то граф Γ не содержит циклов, то есть каждая связная компонента его является деревом.
   б) Доказать, что если функция q_Γ неотрицательно определена, то каждая связная компонента графа Γ — либо дерево, либо замкнутая цепочка.
   в) * Описать все связные графы, для которых функция q_Γ положительно определена; неотрицательно определена.
5) Найти все инварианты представления колчана из одной стрелки (между двумя разными вершинами).
6) Найти все неразложимые представления колчана — цепочки из трех вершин и двух стрелок между ними (для всевозможных ориентаций).
7) Будем классифицировать с точностью до изоморфизма всевозможные тройки подпространств, то есть наборы $(V; V_1, V_2, V_3)$, где V — векторное пространство над полем $\Bbbk$, а V_1, V_2, V_3 — подпространства пространства V.
   а) Пусть $U = U_1 = U_2 = U_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.
   б) Пусть $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U = U_1 = U_2 = V_1 \cap V_2$, $U_3 = 0$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.
   в) Пусть $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U_1 = V_1 \cap (V_2 + V_3)$, $U_2 = V_2 \cap (V_1 + V_3)$, $U_3 = V_3 \cap (V_1 + V_2)$, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.
   г) Описать все (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.
   д) Доказать, что в любое разложение данной тройки подпространств на неразложимые входят одни и те же (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.
   е) Какие численные инварианты однозначно определяют класс изоморфизма данной тройки подпространств?