Задачи по алгебре. 1 курс. 22 марта 2005 г.

1) Отождествим тензорное произведение $V^*\otimes V$ с $\mathrm{Hom}(V,V)$. Как описать отображение $\mathrm{Hom}(V,V)\to\Bbbk$, отвечающее свертке тензоров? Какому оператору из $\mathrm{Hom}(V,V)$ отвечает свертка (как элемент двойственного пространства $\mathrm{Hom}(V,V)^*$) при каноническом изоморфизме $\mathrm{Hom}(V,V)^*\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(V,V)$?
2) Доказать, что любое $GL(V)$-эквивариантное (то есть перестановочное с действием $GL(V)$) линейное отображение $V^*\otimes V\to\Bbbk$ пропорционально отображению свертки.
3) Найти жорданову нормальную форму матрицы оператора $A\otimes B$, если матрицы операторов A и B имеют соответственно жорданову нормальную форму:
   а) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$;
   б) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$;
   в) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
4) Пусть $\Bbbk$ — подполе поля $\mathbb{F}$. Построить канонические изоморфизмы
   а) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes V,\mathbb{F}\otimes W)\cong\mathbb{F}\otimes\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$,
   б) $(\mathbb{F}\otimes_{\Bbbk}V)\otimes_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\Bbbk}W)\cong\mathbb{F}\otimes_{\Bbbk}(V\otimes_{\Bbbk}W)$,
   где через $\otimes_{\Bbbk}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\otimes_{\mathbb{F}}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\mathbb{F}$.
5) Доказать, что $\mathbb{C}$-алгебра $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}$ изоморфна матричной алгебре $M_2(\mathbb{C})$.
6) Обозначим через Conj функтор $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, переводящий векторное пространство V в комплексно-сопряженное пространство $\overline{V}$ (пространство $\overline{V}$ совпадает с V как множество, а умножение на $x\in\mathbb{C}$ в $\overline{V}$ задается как умножение на $\overline{x}$ в V). Пусть $\mathrm{Compl}:\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ — функтор комплексификации, $\mathrm{Real}:\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$ — функтор овеществления, а $\mathrm{Id}:\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ — тождественный функтор. Доказать, что функтор $\mathrm{Compl}\circ\mathrm{Real}$ изоморфен функтору $\mathrm{Id}\oplus\mathrm{Conj}$.