Задачи по алгебре. 1 курс. 5 апреля 2005 г.

1) Пусть $\Bbbk = \mathbb{C}$.
   а) Какие собственные значения могут иметь операторы представления группы треугольника D_3?
   б) Как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпространствах оператора, представляющего поворот?
   в) Доказать, что группа D_3 имеет всего три неприводимых комплексных преставления: два одномерных и одно двумерное.
   г) Выписать явное разложение левого регулярного представления группы D_3 в сумму неприводимых представлений.
2) Описать все неприводимые комплексные представления группы D_n.
3) Рассмотрим следующие вещественные представления симметрической группы S_4:
   - тривиальное одномерное представление;
   - одномерное представление, в котором каждая перестановка действует умножением на свой знак;
   - композиция канонической проекции $S_4 \to S_4/V_4$, изоморфизмов $S_4/V_4 \xrightarrow{\sim} S_3 \xrightarrow{\sim} D_3$ и неприводимого двумерного представления группы D_3;
   - изоморфизм S_4 на группу вращений куба;
   - изоморфизм S_4 на группу всех (в том числе несобственных) движений тетраэдра.

   Доказать, что все эти представления являются неприводимыми, что все они остаются неприводимыми при комплексификации, и что таким образом получаются все неприводимые комплексные представления группы S_4.
4) Доказать полную приводимость и найти все минимальные инвариантные подпространства для следующих представлений группы $GL_n(\Bbbk)$ в пространстве матриц $M_n(\Bbbk)$: а) $L(A)X = AX$; б) $\mathrm{Ad}(A)X = AXA^{-1}$ ($\mathrm{char}\,\Bbbk$ не делит n); в) $\Phi(A)X = AXA^t$ ($\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$).
5) Доказать, что неприводимое комплексное представление абелевой группы обязательно одномерно.
6) Доказать существенность условий теоремы Машке (конечность группы; характеристика поля не делит порядок группы).