Задачи по алгебре. 1 курс. 12 апреля 2005 г.

1) Доказать, что левое регулярное представление конечной группы изоморфно её правому регулярному представлению.
2) Реализуем пространство, двойственное к групповой алгебре $\mathbb{C}G$ конечной группы G, как пространство $\mathbb{C}[G]$ функций на группе. Как будут записываться операторы представления, двойственного к левому (правому) регулярному представлению?
3) Пусть G — конечная группа; обозначим её левое регулярное представление через λ, а правое — через π. Найти линейный изоморфизм $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}[G]$, осуществляющий одновременно изоморфизмы $\lambda \xrightarrow{\sim} \lambda^*$ и $\pi \xrightarrow{\sim} \pi^*$. Какой двусторонне инвариантной билинейной форме на $\mathbb{C}G$ отвечает этот изоморфизм?
4) Перенести структуру алгебры с $\mathbb{C}G$ на $\mathbb{C}[G]$ с помощью изоморфизма, построенного в предыдущей задаче. (Полученное умножение функций на группе называется *свёрткой*; свёртка функций f и g обычно обозначается как $f * g$).
5) Доказать, что центр групповой алгебры $\mathbb{C}G$ соответствует множеству функций из $\mathbb{C}[G]$, постоянных на классах сопряжённых элементов.
6) Пусть ε — одномерное представление группы S_4, в котором каждая перестановка действует умножением на свой знак, ρ — её представление вращениями куба, а τ — её представление симметриями тетраэдра. Доказать, что $\rho \otimes \varepsilon \simeq \tau$ и $\tau \otimes \varepsilon \simeq \rho$.
7) Разложить на неприводимые представление S_4 в пространстве функций на рёбрах тетраэдра.