Задачи по алгебре. 1 курс. 19 апреля 2005 г.

1) Классифицировать простые A-модули, где
   а) $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 3x + 2)$;
   б) $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 2x + 1)$.
2) Является ли полупростым любой A-модуль для алгебры A из предыдущей задачи?
3) Отождествим алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ с $M_2(\mathbb{C})$. Найти алгебру $A^! = \mathrm{End}_A(\mathbb{C}^2)$, если A — алгебра всех матриц вида а) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. В каких из этих случаев $A^{!!} = A$?
4) Доказать, что все простые модули над алгеброй $M_n(\mathbb{C})$ изоморфны.
5) Сколько неизоморфных простых модулей над алгеброй $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$?
6) Найти все такие группы G, для которых $\mathbb{C}G = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (прямая сумма алгебр).
7) Перечислить все (с точностью до изоморфизма) конечные группы G, для которых групповая алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна
   а) прямой сумме двух матричных алгебр;
   б) прямой сумме трех матричных алгебр.