Независимый Московский Университет

Алгебра

Первый курс, весенний семестр 2004/05 г.
Лекции 5–7

Категории и функторы

Определение 1. Говорят, что задана *категория* $\mathcal{A}$, если заданы

1) Класс *объектов* $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

2) Множество *морфизмов* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ для каждой пары (A,B) объектов из $\mathcal{A}$; вместо $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ обычно пишут $u : A \to B$ или $A \xrightarrow{u} B$.

3) Отображение *композиции* морфизмов
$$\mu : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C)$$
для каждой тройки (A,B,C) объектов из $\mathcal{A}$; композиция $\mu(u,v)$ морфизмов $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ и $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C)$ обычно обозначается $v \circ u$ или просто vu.

При этом требуется выполнение следующих аксиом:

(I) Композиция морфизмов ассоциативна: для каждой тройки морфизмов $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$ выполнено равенство $w(vu) = (wv)u$.

(II) Для каждого объекта $A \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{A}}$ существует морфизм $1_A : A \to A$, называемый *тождественным морфизмом* или *единицей* объекта A, такой, что $1_A u = u$ и $v 1_A = v$ для любых морфизмов $B \xrightarrow{u} A$ и $A \xrightarrow{v} C$.

(III) Если пары (A,B) и (A',B') различны, то пересечение множеств $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A',B')$ пусто.

Любой морфизм $A \to A$ называется *эндоморфизмом* объекта A. Морфизм $\varphi : A \to B$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $\psi : B \to A$, что $\psi\varphi = 1_A$ и $\varphi\psi = 1_B$.

Пример 1. Категория *Sets* множеств, объектами которой являются все множества, морфизмами — отображения множеств, а композиция морфизмов — это композиция отображений.

Пример 2. Категория $\mathit{Vect}_{\Bbbk}$ конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, морфизмами в которой являются линейные отображения.

Пример 3. Категория $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \bullet)$, где V — фиксированное конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$. Объектами этой категории являются линейные отображения $\varphi : V \to W$, где W — любой объект категории Vect, а морфизмом объекта $\varphi : V \to W$ в объект $\psi : V \to U$ называется любое линейное отображение $\tau : W \to U$, делающее диаграмму
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ W \arrow[r, "\tau"] & U \end{tikzcd}$$
коммутативной.

Определение 2. Для каждой категории $\mathcal{A}$ следующим образом определяется *дуальная категория* $\mathcal{A}^{\circ}$:

А) Объекты категории $\mathcal{A}^{\circ}$ — те же, что у категории $\mathcal{A}$, т. е. $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^{\circ} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Б) По определению полагаем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,A)$.

В) Композиция
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(A,C)$$
определяется так: если
$$u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(A,B) \qquad \text{и} \qquad v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(B,C),$$
то
$$v \underset{\mathcal{A}^{\circ}}{\circ} u = u \underset{\mathcal{A}}{\circ} v.$$

Определение 3. Пусть даны категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. *Ковариантный* (соответственно *контравариантный*) *функтор* F из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{C}$ состоит из:

а) отображения $A \mapsto FA$, сопоставляющего каждому объекту A из категории $\mathcal{A}$ объект FA из категории $\mathcal{C}$;

б) отображений $F(A,B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA,FB)$ (соответственно $F(A,B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FB,FA)$), определенных для всех пар (A,B) объектов из $\mathcal{A}$. Образ морфизма $u : A \to B$ при отображении $F(A,B)$ мы будем обозначать просто через Fu.

При этом требуется выполнение следующих свойств:

(i) $F1_A = 1_{FA}$ для любого объекта A из категории $\mathcal{A}$;

(ii) $F(v \circ u) = Fv \circ Fu$ (соответственно $F(v \circ u) = Fu \circ Fv$) для любых двух морфизмов u и v, композиция $v \circ u$ которых определена.

Ясно, что контравариантный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ — это, по существу, то же самое, что ковариантный функтор $\mathcal{A}^\circ \to \mathcal{C}$.

Пример 4. Для любого вещественного векторного пространства V его *комплексификация* $V^{\mathbb{C}}$ определяется как множество пар (u,v), где $u, v \in V$. В $V^{\mathbb{C}}$ вводится структура комплексного векторного пространства следующим образом: сложение покомпонентное, а умножение на комплексное число $z = x + iy$ задается формулой $z(u,v) = (xu - yv, xv + yu)$.

Для любого $\mathbb{R}$-линейного отображения вещественных векторных пространств $f : V \to W$ его комплексификация определяется так: $f^{\mathbb{C}}(u,v) = (fu, fv)$. Ясно, что $f^{\mathbb{C}}$ является $\mathbb{C}$-линейным отображением. Проверьте самостоятельно, что комплексификация является ковариантным функтором из категории $\mathit{Vect}_{\mathbb{R}}$ в категорию $\mathit{Vect}_{\mathbb{C}}$.

Пример 5. Для любого комплексного векторного пространства V его *овеществление* $V_{\mathbb{R}}$ определяется как то же самое множество V со структурой вещественного векторного пространства (сложение векторов и их умножение на вещественные числа уже определено в силу включения $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Для любого $\mathbb{C}$-линейного отображения комплексных векторных пространств $f : V \to W$ его овеществлением является то же самое отображение (ясно, что оно является $\mathbb{R}$-линейным). Проверьте, что овеществление является ковариантным функтором из категории $\mathit{Vect}_{\mathbb{C}}$ в категорию $\mathit{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Упражнение 1. Для любого векторного пространства V над полем $\Bbbk$ определено сопряженное пространство V^*, причем для любого $\Bbbk$-линейного отображения векторных пространств $f : V \to W$ имеется сопряженное отображение $f^* : W^* \to V^*$. Проверьте, что сопряжение является контравариантным функтором из категории $\mathit{Vect}_{\Bbbk}$ в категорию $\mathit{Vect}_{\Bbbk}$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — категории. Их *прямым произведением* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ называется категория, объектами которой являются всевозможные пары (A,B), где $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((A,B),(A'B')) = \mathrm{Hom}(A,A') \times \mathrm{Hom}(B,B')$. При этом композиция морфизмов определяется покомпонентно.

Аналогично определяется прямое произведение любого семейства категорий.

Упражнение 2. Пусть $\mathcal{A} = \mathit{Vect}_{\Bbbk}$ — категория конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$. Проверьте, что отображение $(V,W) \mapsto \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$, определенное на объектах категории $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A}$, естественно продолжается до ковариантного функтора $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Иначе говоря, $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\ ,\ )$ — *функтор от двух аргументов, контравариантный по первому и ковариантный по второму.*

Определение 5. Пусть F и G — два ковариантных функтора из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{C}$. *Функторным морфизмом* $f : F \to G$ называется совокупность морфизмов $f_A : FA \to GA$ для всех $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, таких, что для любого морфизма $u : A \to B$ из категории $\mathcal{A}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{f_A} & GA \\ {\scriptstyle Fu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gu} \\ FB & \xrightarrow[f_B]{} & GB \end{array}$$

коммутативна.

Если функторы F и G контравариантны, то направление вертикальных стрелок на диаграмме меняется на противоположное.

Функторный морфизм называется *функторным изоморфизмом*, если f_A является изоморфизмом для любого объекта A из категории $\mathcal{A}$.

Упражнение 3. Докажите, что функтор из категории конечномерных векторных пространств в себя, переводящий каждое пространство в дважды двойственное к нему, изоморфен тождественному функтору.

Определение 6. Пусть $\mathcal{A}$ — категория. Объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ называется *инициальным*, или *универсальным отталкивающим*, если для любого объекта $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ состоит из одного элемента. Объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ называется *финальным*, или *универсальным притягивающим*, если для любого объекта $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,A)$ состоит из одного элемента.

Пример 6. В категории множеств инициальным объектом является пустое множество, а финальным объектом — любое одноэлементное множество.

Упражнение 4. Пусть M и N — фиксированные множества. Обозначим через $\mathcal{A}$ категорию, объектами которой являются пары отображений $\varphi : M \to S$ и $\psi : N \to S$, где S — любое множество. Морфизмом пары (φ, ψ) в пару (φ', ψ') является любое отображение $\tau : S \to S'$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi'"] \\ S \arrow[r, "\tau"] & S' \\ N \arrow[r, equal] \arrow[u, "\psi"] & N \arrow[u, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной. Аналогично определяется категория $\mathcal{B}$, объектами которой являются пары отображений $\xi : T \to M$ и $\eta : T \to N$, где T — любое множество. Докажите, что в категории $\mathcal{A}$ есть инициальный объект — дизъюнктное объединение $M \sqcup N$ множеств M и N с отображениями вложения множеств M и N в $M \sqcup N$, а в категории $\mathcal{B}$ есть финальный объект — декартово произведение $M \times N$ множеств M и N с отображениями проекции $M \times N$ на M и N.

Утверждение 1. *Если в категории существует инициальный объект, то он определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма. Аналогично, если в категории существует финальный объект, то он определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма.*

Доказательство. Пусть A и B — два инициальных объекта. Поскольку A — инициальный, существует единственный морфизм $\varphi : A \to B$, а поскольку B — инициальный, существует единственный морфизм $\psi : B \to A$. В силу инициальности объектов A и B, у них нет эндоморфизмов, кроме тождественного. Поэтому $\psi\varphi = 1_A$ и $\varphi\psi = 1_B$, то есть φ и ψ — изоморфизмы.

Для финальных объектов доказательство аналогично. □

Тензорное произведение

Пусть $V_1, \dots, V_p, U$ — векторные пространства над полем $\Bbbk$. Отображение

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \to U$$

называется *полилинейным* (или *p-линейным*), если оно линейно по каждому из p аргументов (при фиксированных значениях остальных аргументов). Такие отображения образуют векторное пространство — действительно, очевидно, что линейная комбинация полилинейных отображений вновь является полилинейным отображением. Обозначим это векторное пространство через $\mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_p; U)$.

Рассмотрим случай билинейных отображений $V \times W \to U$. Обобщение на случай полилинейных отображений не составит труда.

Фиксируем векторные пространства V и W. Рассмотрим категорию, объектами которой являются билинейные отображения из $V \times W$ в произвольное векторное пространство, а морфизмом билинейного отображения $\varkappa : V \times W \to U$ в билинейное отображение $\varkappa' : V \times W \to U'$ является любое линейное отображение $\tau : U \to U'$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varkappa"'] & V \times W \arrow[d, "\varkappa'"] \\ U \arrow[r, "\tau"] & U' \end{tikzcd}$$

Универсальный отталкивающий объект в этой категории (универсальное билинейное отображение) называется тензорным произведением пространств V и W. Более точно, тензорным произведением пространств V и W называется векторное пространство, в котором принимает значения универсальное билинейное отображение. Такое пространство обозначается через $V \otimes W$, а универсальное билинейное отображение называется тензорным умножением и обозначается символом $\otimes$ (то есть образ пары (v, w) при универсальном билинейном отображении обозначается как $v \otimes w$ и называется тензорным произведением этих векторов).

Поскольку инициальный объект любой категории (если он существует) определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма, то тензорное произведение двух пространств (если оно существует) определено однозначно с точностью до единственного изоморфизма. Осталось доказать существование тензорного произведения.

Мы начнем с конструкции, применимой и в более общей ситуации тензорного произведения модулей над кольцом (хотя это нам пока и не понадобится).

Для любых двух векторных пространств V и W рассмотрим пространство L всех *формальных* линейных комбинаций элементов прямого произведения $V \times W$ (то есть пространство, базисом которого является множество $V \times W$). В L рассмотрим подпространство L_0, являющееся линейной оболочкой элементов вида

1) $\alpha(v,w)-(\alpha v,w)$;

2) $\alpha(v,w)-(v,\alpha w)$;

3) $(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)$;

4) $(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)$.

Рассмотрим отображение $V\times W\to L/L_0$, переводящее каждую пару $(v,w)\in V\times W$ в класс этой пары по модулю L_0.

Упражнение 5. Докажите, что это отображение является универсальным билинейным отображением.

Таким образом, мы можем положить $V\otimes W=L/L_0$ и обозначить через $v\otimes w$ (для любых $v\in V$, $w\in W$) образ пары (v,w) при описанном выше отображении.

Вышеизложенная конструкция, несмотря на свою общность и универсальность, не очень наглядна. Поэтому полезно иметь в виду и другие варианты конструкции тензорного произведения векторных пространств.

Пусть в пространствах V и W выбраны базисы (v_i) и (w_j) соответственно. Рассмотрим произвольное полилинейное отображение $\varphi: V\times W\to U$. Тогда для любых $v=\sum x^i v_i\in V$ и $w=\sum y^j w_j\in W$ мы получаем

$$\varphi(v,w)=\sum_{i,j}x^i y^j\varphi(v_i,w_j). \tag{1}$$

Таким образом, билинейное отображение полностью определяется своими значениями на базисных векторах, причем эти значения могут быть любыми, так как равенство (1) определяет билинейное отображение φ при любом выборе векторов $\varphi(v_i,w_j)\in U$.

Рассмотрим теперь новое векторное пространство с базисом, состоящем из символов $v_i\otimes w_j$, где v_i пробегает базис пространства V, а w_j пробегает базис пространства W. Обозначим это пространство через $V\otimes W$ и назовем *тензорным произведением* пространств V и W.

Определим билинейное отображение $\otimes: V\times W\to V\otimes W$ формулой

$$\Bigl(\sum x^i v_i,\sum y^j w_j\Bigr)\mapsto\sum_{i,j}x^i y^j v_i\otimes w_j.$$

Для любого билинейного отображения $\varphi: V\times W\to U$ определим *линейное* отображение $\tilde\varphi: V\otimes W\to U$ формулой

$$\tilde\varphi\Bigl(\sum_{i,j}t^{ij}v_i\otimes w_j\Bigr)=\sum_{i,j}t^{ij}\varphi(v_i,w_j). \tag{2}$$

Ясно, что $\varphi=\tilde\varphi\circ\otimes$ и отображение $\tilde{}: \mathrm{Hom}(V,W;U)\to\mathrm{Hom}(V\otimes W,U)$ является изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что билинейное отображение $\otimes: V\times W\to V\otimes W$ является универсальным.

Замечание. Всё вышесказанное буквально переносится на полилинейные отображения. Таким образом легко сформулировать определение тензорного произведения нескольких пространств как в терминах базисов, так и в терминах универсального полилинейного отображения. (Сделайте это!)

Функториальность и канонические изоморфизмы

Утверждение 2. *Отображение $(V,W)\mapsto V\otimes W$ продолжается до ковариантного функтора $Vect_{\Bbbk}\times Vect_{\Bbbk}\to Vect_{\Bbbk}$.*

Доказательство. Нам надо доказать, что можно определить для любых линейных отображений $f: V_1\to V_2$ и $g: W_1\to W_2$ линейное отображение $f\otimes g: V_1\otimes W_1\to V_2\otimes W_2$ так, чтобы $1_V\otimes 1_W=1_{V\otimes W}$ для любых векторных пространств V и W, и чтобы тензорное произведение композиций линейных отображений $f=f_1\circ f_2$ и $g=g_1\circ g_2$ всегда равнялось композиции тензорных произведений: $f\otimes g=(f_1\otimes g_1)\circ(f_2\otimes g_2)$.

Итак, пусть $f: V_1\to V_2$ и $g: W_1\to W_2$ — линейные отображения. Рассмотрим отображение $\otimes\circ(f\times g)$: $V_1\times W_1\to V_2\otimes W_2$ (переводящее (v,w) в $f(v)\otimes g(w)$). По универсальности тензорного произведения существует единственное линейное отображение $V_1\otimes W_1\to V_2\otimes W_2$, которое мы обозначим через $f\otimes g$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V_1\times W_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\otimes"'] & V_1\times W_1 \arrow[d, "\otimes\circ f\times g"] \\
V_1\otimes W_1 \arrow[r, "f\otimes g"'] & V_2\otimes W_2
\end{tikzcd}$$

коммутативной. То, что $1_V\otimes 1_W=1_{V\otimes W}$ для любых векторных пространств V и W, и что тензорное произведение композиций линейных отображений равняется композиции тензорных произведений, тоже автоматически следует из универсальности (проверьте это). $\square$

Аналогичным образом, операция взятия тензорного произведения k пространств продолжается до ковариантного функтора от k аргументов.

Функторы можно подставять один в другой, то есть брать композицию функторов. Например, можно рассмотреть функтор $(V, W) \mapsto V^* \otimes W$, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму, или ковариантный функтор $(U, V, W) \mapsto (U \oplus V) \otimes W$, или функтор $(U, V, W) \mapsto \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$ (кстати, по каким аргументам он ковариантен, а по каким — контравариантен?)

Некоторые из функторов, построенных таким образом из функторов *, Hom, $\oplus$ и $\otimes$, оказываются изоморфными. Такую ситуацию часто описывают словами «канонический изоморфизм». Вот несколько примеров:

Утверждение 3. *Имеют место канонические изоморфизмы:*

1) $U \otimes V \otimes W \xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \otimes W$;

2) $V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$;

3) $(U \oplus V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes W \oplus V \otimes W$;

4) $V^* \otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^*$;

5) $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$;

6) $\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$.

Доказательство. Построим изоморфизм $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$. Рассмотрим отображение $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, переводящее пару (ξ, w) в линейное отображение $\xi(\bullet)w$ (переводящее каждый элемент $v \in V$ в $\xi(v)w$). Ясно, что это отображение билинейно, поэтому оно поднимается до линейного отображения $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Ядро такого линейного отображения, очевидно, нулевое. Из совпадения размерностей теперь следует, что это изоморфизм. То, что набор изоморфизмов $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$ для всех V и W составляет изоморфизм функторов, проверьте сами.

Остальные канонические изоморфизмы доказываются примерно из тех же соображений. □

Следующее упражнение дает, по существу, еще один вариант конструкции тензорного произведения k пространств.

Упражнение 6. Докажите, что отображение $\mathrm{Ob}\, \mathit{Vect}_{\Bbbk}^k \to \mathrm{Ob}\, \mathit{Vect}_{\Bbbk}$, переводящее $(V_1, \ldots, V_k)$ в $\mathrm{Hom}(V_1^*, \ldots, V_k^*; \Bbbk)$, продолжается до функтора, изоморфного тензорному произведению. Как записывается универсальное k-линейное отображение $V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathrm{Hom}(V_1^*, \ldots, V_k^*; \Bbbk)$?

Координатная запись тензоров

Вспомним, что арифметическое линейное пространство $\Bbbk^n$ — это пространство последовательностей $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (координат в стандартном базисе (e_i)). Тензорное произведение арифметических линейных пространств $\Bbbk^n$ и $\Bbbk^m$ — это пространство двухиндексных наборов $(t^{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ (координат в базисе $(e_i \otimes e_j)$). Алгебра линейных операторов в пространстве $\Bbbk^n$ естественно отождествляется с алгеброй матриц $M_n(\Bbbk)$. Аналогично, алгебра линейных операторов в пространстве $\Bbbk^n \otimes \Bbbk^m$ — это алгебра «матриц», строки и столбцы которых занумерованы парами индексов (i, j), где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, то есть четырехиндексных наборов с двумя верхними (первыми) и двумя нижними (вторыми) индексами.

Упражнение 7. Доказать, что тензорное произведение матриц $A = (a^i_k)$ и $B = (b^j_l)$ (то есть тензорное произведение отображений) имеет координаты $c^{ij}_{kl} = a^i_k b^j_l$.

Выбрать базис (v_i) в n-мерном пространстве V — по сути то же самое, что задать изоморфизм $\varphi : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ такой, что $v_i = \varphi(e_i)$. Выбор базисов в n-мерном пространстве V и m-мерном пространстве W позволяет отождествить пространство $V \otimes W$ с пространством двухиндексных наборов $(t^{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ (тензорное произведение изоморфизмов $\varphi : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ и $\psi : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм $\varphi \otimes \psi : \Bbbk^n \otimes \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} V \otimes W$).

Матрица A перехода от базиса (v_i) к базису $(\tilde{v}_i)$, отвечающему изоморфизму $\tilde{\varphi} : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$, — это матрица линейного отображения $\varphi^{-1}\tilde{\varphi} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ (линейные отображения $\Bbbk^n \to \Bbbk^n$ находятся в естественной биекции с матрицами $n \times n$). Пусть $A = (a^i_k)$ — матрица перехода от базиса (v_i) к базису $(\tilde{v}_i)$ в пространстве V, а $B = (b^j_l)$ — матрица перехода от базиса (w_j) в пространстве W, отвечающего изоморфизму $\psi : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} W$, к базису $(\tilde{w}_j)$, отвечающему изоморфизму $\tilde{\psi} : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} W$. Тогда координаты (t^{ij}) тензора t в базисе $(v_i \otimes w_j)$ выражаются через его координаты $(\tilde{t}^{ij})$ в базисе $(\tilde{v}_i \otimes \tilde{w}_j)$ по формуле

$$t^{ij} = \sum_{k,l} a^i_k b^j_l \tilde{t}^{kl}. \tag{3}$$

Другими словами, к координатам тензора применяется тензорное произведение отображений $\varphi^{-1}\tilde{\varphi} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ и $\psi^{-1}\tilde{\psi} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$.

Таким образом, пространство $W \times V$ можно описать так: тензор (элемент $W \times V$) задаётся для каждого выбора базисов в пространствах V и W набором своих координат (t^{ij}) (то есть соответствующим элементом тензорного произведения арифметических линейных пространств), причем при замене базисов координаты тензора преобразуются по формуле (3).

Если пространства V и W связаны друг с другом, например $W = V$ или $W = V^*$, то естественно рассматривать лишь согласованные замены базисов. Так, если $A = (a^i_j)$ — матрица замены базиса в пространстве V, то есть $\tilde{v}_j = \sum_i a^i_j v_i$. Тогда для сопряженных базисов в пространстве V^* имеет место формула замены $\tilde{v}^i = \sum_j b^i_j v^j$, где $B = (b^i_j) = A^{-1}$. Соответственно элемент тензорного произведения

$$V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}$$

для каждого выбора базиса пространства V задается набором координат $(t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q})$, причем при замене базиса координаты преобразуются так:

$$t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \sum_{k_1, \dots, k_p l_1, \dots, l_q} a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_p}_{k_p} b^{l_1}_{j_1} \dots b^{l_q}_{j_q} \tilde{t}^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}.$$

Расширение поля скаляров

Пусть $\Bbbk$ — подполе поля $\mathbb{F}$, а V — векторное пространство над полем $\Bbbk$. Поле $\mathbb{F}$ тоже имеет естественную структуру векторного пространства над полем $\Bbbk$. Рассмотрим тензорное произведение этих векторных пространств: $\mathbb{F} \otimes V$. Каждый элемент $\lambda \in \mathbb{F}$ действует в $\mathbb{F} \otimes V$ посредством $\Bbbk$-линейного оператора $\lambda \otimes 1$ (тензорное произведение умножения на λ в $\mathbb{F}$ и единичного оператора в V). Легко проверить, что таким образом $\mathbb{F} \otimes V$ приобретает структуру векторного пространства над полем $\mathbb{F}$. Если $(v_1, \dots, v_n)$ — базис пространства V, то $(1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n)$ — базис пространства $\mathbb{F} \otimes V$.

Упражнение 8. Доказать, что если V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, то комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ естественно изоморфно комплексификации пространства V.

Из функториальности тензорного произведения следует, что тензорное умножение на поле $\mathbb{F}$ представляет собой функтор из категории $Vect_{\Bbbk}$ в категорию $Vect_{\mathbb{F}}$. Отметим, что если оператор $f : V \to V$ записывается в базисе (v_i) матрицей A, то соответствующий оператор $1 \otimes f : \mathbb{F} \otimes V \to \mathbb{F} \otimes V$ записывается в базисе $(1 \otimes v_i)$ той же матрицей.

Упражнение 9. Построить канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes V, \mathbb{F} \otimes W) \cong \mathbb{F} \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W),$$

$$(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \cong \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} (V \otimes_{\Bbbk} W),$$

где через $\otimes_{\Bbbk}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\otimes_{\mathbb{F}}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\mathbb{F}$.

Поскольку каждое поле можно вложить в алгебраически замкнутое, то таким образом можно сводить многие задачи о тензорных произведениях операторов и т. п. к случаю алгебраически замкнутого поля (и пользоваться, например, существованием жордановой нормальной формы).

Отметим также, что если A – алгебра над полем $\Bbbk$, а поле $\mathbb{F}$ – расширение поля $\Bbbk$, то $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} A$ имеет естественную структуру алгебры над $\mathbb{F}$. Действительно, структура $\Bbbk$-алгебры на A задается $\Bbbk$-линейным отображением $A \otimes_{\Bbbk} A \to A$; тензорно умножая на $\mathbb{F}$, получаем $\mathbb{F}$-линейное отображение $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} (A \otimes_{\Bbbk} A) \to \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} A$; после этого второй изоморфизм из упражнения 9 дает искомое $\mathbb{F}$-линейное отображение $(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} A) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} A) \to \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} A$.