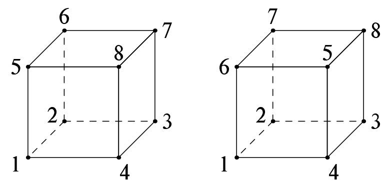
Задачи к зачёту по алгебре (теория представлений)

1. Опишите все неприводимые комплексные представления группы (**а**) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; (**б**) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. (**а**) Разложите в сумму неприводимых представление группы S_4 в пространстве комплексных функций на вершинах куба. (**б**) В вершинах куба записаны числа $1, 2, \ldots, 8$. Каждую минуту вместо каждого из чисел записывают среднее арифметическое чисел в трёх соседних вершинах. Для каждого из вариантов на рисунке опишите предельную ситуацию через достаточно большое время. (Указание: рассматриваемое преобразование действует на каждой неприводимой компоненте пространства функций умножением на число (почему?).)



3. Опишите все неприводимые комплексные представления группы $S_3 \times S_3$.

4. Опишите двумерные комплексные представления группы $\mathbb{Z}$ с точностью до изоморфизма.

5. (**а**) Пусть V — n-мерное комплексное пространство. На $V \otimes V \otimes V$ действует группа S_3, переставляя сомножители:

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes v_{\sigma^{-1}(3)}.$$

Разложите это представление в сумму неприводимых. (**б**) Тот же вопрос для группы S_4 (и четырёх сомножителей).

6. Группа $G = GL_{n+1}(\mathbb{K})$ действует (проективными преобразованиями) на множестве $L = \mathbb{KP}^n$ (прямые, проходящие через нуль, в пространстве $\mathbb{K}^{n+1}$). Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$. Рассмотрим представление группы G в пространстве V комплексных функций на L. В сумму какого числа неприводимых раскладывается V?

7. Пусть V — тавтологическое комплексное представление (перестановками базиса в $\mathbb{C}^n$) группы S_n. (**а**) Вычислите характер χ_V и выведите из этого вычисления, что тавтологическое представление есть сумма двух неприводимых. (**б**) В сумму какого числа неприводимых раскладывается представление $V \otimes V$? (**в**) Найдите размерности неприводимых слагаемых $V \otimes V$.

8. Пусть p — нечётное простое число. Рассмотрим группу $G \subset GL_2(\mathbb{F}_p)$, состоящую из матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. (**а**) Найдите все неприводимые комплексные представления этой группы для $p = 3$. (**б**) Найдите все неприводимые комплексные представления этой группы для $p = 5$. (Указание: задайте эту группу образующими и соотношениями.) (**в**)* Укажите $\left(\frac{p-1}{2}\right)$-мерное неприводимое комплексное представление этой группы. (**г**)* Найдите все неприводимые комплексные представления этой группы для произвольного p.