Решения задач нужно сдать в учебную часть или непосредственно В. Доценко (dotsenko@mccme.ru) не позже 18^{00} вторника 24 мая.

Определения и обозначения: M_k — образ вложения Веронезе $v_k\colon \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^k$; $S_{m,n}$ — образ вложения Сегре $i_{m,n}\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$; многообразие хорд $\mathcal{X}_1(M)$ подмногообразия $M \subset \mathbb{P}^N$ — замыкание объединения всех проективных прямых, соединяющих пары различных точек $x, y \in M$; аналогично, k-ое многообразие хорд $\mathcal{X}_k(M)$ — это замыкание объединения точек k-мерных плоскостей, проходящих через $k+1$ точек M общего положения (не лежащих в меньшей плоскости). Всюду, где основное поле не указано явно, имеется в виду произвольное алгебраически замкнутое поле характеристики нуль.

1. Задайте кривую Веронезе $M_3 \subset \mathbb{P}^3$ двумя уравнениями.

2. Рассмотрим отображение $\psi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $\psi(x:y) = (x^4 : x^3y : xy^3 : y^4)$.

(**а**) Порождается ли однородный идеал многочленов, равных нулю на $\psi(\mathbb{P}^1)$, двумя элементами?

(**б**) Можно ли задать $\psi(\mathbb{P}^1)$ двумя уравнениями в $\mathbb{P}^3$? (Предупреждение: ответ на этот вопрос неизвестен [автору задачи].)

3. Докажите формулу Плюккера $n(n-1) = n^\vee + 2\nu + 3\varkappa$. (Указание. Можно использовать то, что число точек пересечения кривых степеней m и n с учётом кратностей равно mn.)

4. Изоморфны ли квазипроективные многообразия $\mathbb{A}^1 \setminus \{0,1,2\}$ и $\mathbb{A}^1 \setminus \{0,1,3\}$?

5. Изоморфны ли $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^4$?

6. Рассмотрим проективное многообразие $X = (\mathbb{P}^1)^n$. На нём действует группа S_n, переставляя точки разных $\mathbb{P}^1$.

(**а**) Придумайте, как задать на X/S_n структуру проективного многообразия.

(**б**) Докажите, что $X/S_n \simeq \mathbb{P}^n$.

7. (**а**) Докажите, что многообразие Сегре $S_{n,n} \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$ не лежит ни в какой гиперплоскости.

(**б**) Найдите $\mathcal{X}_n(S_{n,n})$.

(**в**) Докажите, что $\mathcal{X}_1(M_4)$ — гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$.

(**г**) Найдите уравнение $\mathcal{X}_1(M_4)$ в $\mathbb{P}^4$.

(**д**) Докажите, что $\mathcal{X}_{n-1}(M_{2n})$ — гиперповерхность в $\mathbb{P}^{2n}$.

(**е**) Докажите, что любой однородный многочлен степени $2n$ от двух переменных представим в виде суммы $n+1$ точных $(2n)$-ых степеней (линейных функций). Верно ли, что (для какого-нибудь n) любой такой многочлен представим в виде суммы n точных $(2n)$-ых степеней?

(**ж**) Докажите, что не любой однородный многочлен степени 2 от трёх переменных представим в виде суммы двух точных квадратов.

8. Рассмотрим пересечение двух общих квадрик в $\mathbb{CP}^3$.

(**а**) Сколько точек пересечения у этой кривой с общей прямой на одной из квадрик?

(**б**) Докажите, что это кривая степени 4 (т. е. пересекается с общей плоскостью в 4 точках).

(**в**) Докажите, что род этой кривой равен 1.

9. (**а**) Для каких d каждая гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}^4$ содержит прямую?

(**б**) Докажите, что при $d > 2$ множество гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^4$, которые не содержат двумерную плоскость, — непустое открытое множество (в проективном пространстве уравнений таких гиперповерхностей).

(**в**) Верно ли, что каждая гиперповерхность степени $d = 2$ в $\mathbb{P}^4$ содержит двумерную плоскость?

10. Могут ли 2×2-миноры комплексной 2×4-матрицы быть равными:

(**а**) $\{2,3,4,5,6,7\}$;

(**б**) $\{3,4,5,6,7,8\}$?