Решения задач нужно сдать в учебную часть или непосредственно В. Доценко (dotsenko@mccme.ru) не позже 18^{00} среды 28 сентября.

Всюду, где основное поле не указано явно, имеется в виду произвольное алгебраически замкнутое поле характеристики нуль.

1. (**а**) Верно ли, что радикал произведения двух идеалов равен произведению радикалов этих идеалов?

(**б**) Известно, что идеал I совпадает со своим радикалом, и идеал J совпадает со своим радикалом. Верно ли, что их произведение IJ обязательно совпадает со своим радикалом?

2. Существуют два неприводимых аффинных многообразия X и Y и регулярное отображение $\varphi\colon X \to Y$, такие что $\varphi(X)$ не открыто и не замкнуто в Y?

3. Рассмотрим кривую $x^2z^2 = y^3$, $yz^3 = x^3$ в $\mathbb{A}^3$.

(**а**) Укажите ненулевой многочлен $f(x, y)$, обращающийся в нуль на этой кривой.

(**б**) Опишите все такие многочлены.

4. Докажите, что отображение $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ задаёт бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. В каких точках он регулярен? А его обратный?

5. Является ли образ отображения $\mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, заданного формулами $(x, y, z) \mapsto (x, xy, xyz)$, открытым? плотным? замкнутым?

6. Какая кривая двойственна (замыканию в $\mathbb{P}^2$) кривой $y^2 = x^3$?

7. Пусть $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$.

(**а**) При каких n кольцо R содержит делители нуля?

(**б**) Докажите, что при $n = 3$ в кольце R есть идеал, не содержащийся ни в каком главном идеале, такой что его квадрат содержится в главном идеале.

(**в**) Докажите, что при $n = 4$ в кольце R есть два различных простых идеала, не содержащихся в главных идеалах, такие что их произведение содержится в главном идеале.

8. Найдите род неособой кривой бистепени (a, b) на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

9. Пусть X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, $p \in \mathbb{P}^n$. Рассмотрим отображение проекции X из точки p на некоторую гиперплоскость, не содержащую p.

(**а**) Докажите, что множество всех точек p, для которых это отображение не является конечным, является алгебраическим многообразием.

(**б**) Вычислите это многообразие, если $n = 3$, а гиперповерхность задана уравнением $xyz = 8t^3$.

Напомним, что кривая, вложенная в $\mathbb{P}^n$, называется невырожденной, если она не лежит ни в какой гиперплоскости.

10. (**а**) Докажите, что в $\mathbb{P}^n$ нет невырожденных кривых степени $n - 1$ (т. е. пересекающихся с общей гиперплоскостью в $n - 1$ точках).

(**б**) Докажите, что невырожденная кривая степени n в $\mathbb{P}^n$ рациональна.

(**в**) Постройте пример такой кривой.

(**г**) Проверьте, что в $\mathbb{P}^3$ есть как рациональные, так и нерациональные невырожденные кривые степени 4.

11. Пусть M — множество прямых на неособой квадрике в $\mathbb{P}^n$. Задайте на M структуру проективного многообразия, найдите его размерность, выясните, является ли оно неприводимым.