1. Нарисуйте в стандартных аффинных картах U_{x_0}, U_{x_1}, U_{x_2} на $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ кривые, заданные в карте U_{x_0} уравнениями: (**а**) $x_1^2 + x_2^2 = 1$; (**б**) $x_2 = x_1^3$; (**в**) $x_2^2 = x_1^3$; (**г**) $x_2^2 = x_1^2(x_1+1)$; (**д**) $x_2^2 = x_1(x_1+1)(x_1+2)$.

2. (Продолжение) Какие из кривых, перечисленных в предыдущей задаче, рациональны? (Пример из лекции показывает, что кривая из пункта (**а**) рациональна.)

3. (**а**) Докажите, что кубическая кривая на плоскости бирационально изоморфна кривой вида $a_1(x)y^2 + a_2(x)y + a_3(x) = 0$, где a_i — многочлен степени не выше i. (Указание: можно считать, что кривая проходит через начало координат.)

(**б**) Докажите, что неприводимая кубическая кривая на плоскости бирационально изоморфна кривой вида $y^2 = x^3 + px + q$, где p, q — некоторые числа.

4. (Пучки коник) Рассмотрим 4 точки A, B, C, D, на вещественной проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. (**а**) Докажите, что всякая коника, проходящая через эти точки, задаётся уравнением $\lambda f + \mu g = 0$, где $f = 0$ и $g = 0$ — уравнения каких-то двух коник в этим свойством. (Например, можно взять $f = f_{AB}f_{CD}$, $g = f_{AC}f_{BD}$, где f_{XY} — уравнение прямой, проходящей через точки X и Y.) Множество таких коник с $(\lambda\colon \mu) \in \mathbb{P}^1$ называется пучком (pencil) коник, проходящих через четыре точки.

(**б**) Пусть пучок коник содержит невырожденную конику. Докажите, что он содержит не более трёх (и не менее одной) вырожденных коник.

(**в**) Найдите вырожденные коники в пучке коник, содержащем коники $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$ и $x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$.

(**г**) Рассмотрим в аффинной карте U_{x_0} коники $x_2^2 + ax_2 + bx_1 + c = 0$ и $x_2 - x_1^2 = 0$. Их точки пересечения, очевидно, суть (t_i, t_i^2), где $t_1, \ldots, t_4$ — корни уравнения $t^4 + at^2 + bt + c = 0$. Исследуя вырожденные коники соответствующего пучка, объясните, как свести решение этого уравнения к решению уравнения третьей степени.

5. Можно ли задать одну из ветвей гиперболы в $\mathbb{R}^2$ полиномиальными уравнениями?