1. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n \subset \mathbb{P}^N$ квазипроективны. Докажите, что

$$\operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{n} Y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{codim} Y_i.$$

(Указание. Реализуйте пересечение двух многообразий как пересечение (другого) многообразия с плоскостью.)

2. Пусть V_k — проективное пространство всех однородных многочленов от $n+1$ переменных степени k $(n > k)$. Докажите, что подмножество X в $V_{d_1} \times \ldots \times V_{d_k}$, состоящее из наборов

$$(F_1(x_0\colon \ldots \colon x_n), \ldots, F_k(x_0\colon \ldots \colon x_n)),$$

для которых общие нули многочленов F_i образуют (**а**) $(n-k)$-мерное многообразие; (**б**) неприводимое $(n-k)$-мерное многообразие, открыто.

3. Докажите, что на квадрике Плюккера в $\mathbb{P}^5$ лежит ровно два семейства двумерных плоскостей: плоскости, отвечающие прямым $\ell \in V$ $(\dim V = 4)$ и состоящие из двумерных плоскостей, проходящих через ℓ, и плоскости, отвечающие гиперплоскостям $\alpha \in V$ и состоящие из двумерных плоскостей, лежащих целиком в α.

4. Пусть $Q \subset V$ $(\dim V = 4)$ — невырожденная квадрика. Рассмотрим множество двумерных плоскостей, лежащих на Q. Докажите, что подмножество квадрики Плюккера, ими образованное, состоит из двух непересекающихся кривых второго порядка.

5. Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ — неособая кубика, точка $p \in S$ не лежит ни на одной прямой, принадлежащей S, плоскость Π не содержит p. Спроецируем $S \setminus p$ на плоскость Π из точки p. Рассмотрим «кривую ветвления», т. е. множество точек плоскости Π, имеющих на $S \setminus p$ ровно один прообраз.

(**а**) Докажите, что кривая ветвления имеет степень 4, т. е. общая прямая пересекает её в четырёх точках.

(**б**)* Докажите, что двойных касательных к кривой ветвления на 1 больше, чем прямых на поверхности S.