1. Опишите неглавные простые идеалы в кольце $\mathbb{C}[x,y]$.

2. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ как вещественную часть аффинной карты $U_{x_0}=\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Верно ли, что окружности на плоскости можно описать как множество всех коник на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, которые содержат по крайней мере три неколлинеарные точки из $\mathbb{R}^2$ и проходят через две фиксированные точки $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$? Найдите эти две точки (принадлежащие всем окружностям).

3. (Соответствия на конике) Рассмотрим невырожденную конику $Q\subset\mathbb{P}^2$, для которой выбрана рациональная параметризация $\mathbb{P}^1\to Q$. Будем говорить, что биекция $Q\to Q$ является проективным преобразованием, если она отвечает проективному преобразованию $\mathbb{P}^1$.

(**а**) Возьмём две точки q_1 и q_2 коники Q и прямую ℓ и рассмотрим композицию (стереографической) проекции Q из q_1 на ℓ и преобразования, обратного проекции Q из q_2 на ℓ. Докажите, что это преобразование проективно.

(**б**) Докажите, что любое проективное преобразование получается так для некоторого (не единственного) выбора q_1, q_2 и ℓ. (**в**) Опишите геометрически неподвижные точки данного проективного преобразования в терминах q_1, q_2, ℓ.

(**г**) Пусть проективное преобразование задано образами трёх данных точек. Как построить q_1, q_2, ℓ с помощью линейки?

(**д**) С помощью линейки постройте треугольник, вписанный в данную конику, стороны которого проходят через три данные точки.

4. Верно ли, что через любые три прямые в $\mathbb{R}^3$ можно провести квадрику?

5. Сколько прямых в (**а**) $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$; (**б**) $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ пересекают четыре данные скрещивающиеся прямые?

6.* (Продолжение) Тот же вопрос для $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{R}^3$.

7. $\mathbb{P}^3$ с неособой квадрикой Q с помощью вложения Сегре отождествляется с пространством линейных проективных преобразований $\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ (одного семейства прямых на квадрике в другое), причём точкам $q\in Q$ отвечают вырожденные преобразования (переводящие всё первое семейство в прямую второго семейства, содержащую Q). Опишите геометрически действие обратимых преобразований (задаваемых точками $q\notin Q$).

8. (Многозначные соответствия на конике) Рассмотрим невырожденную конику $Q\subset\mathbb{P}^2$ с рациональной параметризацией. Будем говорить, что соответствие на Q является алгебраическим типа $m-n$, если множество пар соответствующих точек, рассматриваемое как подмножество $S\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, задаётся уравнением $f(x_0\colon x_1, y_0\colon y_1)=0$, где многочлен f однороден степени m по x и степени n по y.

(**а**) Докажите, что при $2-2$ соответствии все точки, кроме, возможно, конечного числа, имеют 2 образа и 2 прообраза.

Пусть Q_1, Q_2 — невырожденные коники. Докажите, что каждое из множеств S задаёт $2-2$ соответствие на Q_1: (**б**) $S=\{(x,y)\mid (xy)$ касается $Q_2\}$; (**в**) $S=\{(x,y)\mid T_xQ_1\cap T_yQ_1\in Q_2\}$.

(**г**)* Докажите, что каждое $2-2$ соответствие на Q_1 можно представить каждым из двух описанных выше способов, причём это представление (выбор Q_2) единственно.

(**д**) (Теорема Понселе) Даны две невырожденные коники Q и R, причём существует n-угольник, вписанный в Q и описанный вокруг R. Докажите, что для всех точек $q\in Q$, кроме, возможно, конечного числа, существует такой многоугольник, у которого точка q — одна из вершин.