1. Является ли точка $(2,4)$ на кривой $y^2 = x^3 + 4x$ точкой конечного порядка? Если да, то чему равен этот порядок? (В этой задаче за нулевой элемент берётся бесконечно удалённая точка вертикальных прямых.)

2. Пусть $y^2 = x^3 + ax + b$ — неособая кубика в $\mathbb{R}^2$. Какой группе может быть изоморфна подгруппа точек второго порядка на (проективном замыкании) этой кривой?

3. (**а**) Вычислите род кривой $x_0^n + x_1^n + x_2^n = 0$.

(**б**) Докажите, что род неособой кривой степени n равен $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. (Указание. Можно либо формализовать рассуждения с лекции, либо явно предъявить накрытие и применить формулу Римана–Гурвица.)

4. Докажите, что любую неособую кубическую кривую на $\mathbb{P}^2$, имеющую точку перегиба, можно с помощью замены координат привести к нормальной форме Вейерштрасса $y^2z = x^3 + ax^2z + bxz^2 + cz^3$.

5. Определим *гессиан* $H(C)$ кривой C на $\mathbb{P}^2$, заданной в однородных координатах уравнением $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, как множество всех точек $P \in \mathbb{P}^2$, для которых $\det(\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j}) = 0$.

(**а**) Докажите, что линейный проективный изоморфизм сохраняет свойство «быть гессианом».

(**б**) Докажите, что кривая $x_0^3 + x_1^2 x_2 + a x_0 x_2^2 = 0$ является гессианом своего гессиана.

(**в**) Докажите, что любая точка перегиба кривой C принадлежит $H(C)$ и любая неособая точка кривой C, принадлежащая гессиану, является точкой перегиба.

(**г**) Докажите, что неособая кубическая кривая на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ имеет не менее одной точки перегиба и не более девяти. (В частности, неособую кривую можно привести к нормальной форме из задачи 4.)

(**д**) Докажите, что любая неособая кубическая кривая на $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ имеет ровно девять различных точек перегиба.

6. При каких значениях α кубика $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + \alpha x_0 x_1 x_2 = 0$ является гладкой кривой? Найдите её точки перегиба.

7. (**а**) Известно, что прямая ℓ проходит через две точки перегиба кубической кривой C. Докажите, что третья точка пересечения $\ell \cap C$ тоже является точкой перегиба.

(**б**)* Проверьте, что можно отождествить точки перегиба с точками $\mathbb{F}_3^2$ так, что проходящие через тройки точек прямые отождествляются при этом с соответствующими прямыми над конечным полем.