1. Проверьте, что если выбросить из особых кубических кривых $y^2 = x^3$ и $y^2 = x^2(x+1)$ особую точку $(0,0)$, то на них можно ввести структуру группы тем же самым способом, что и для неособых. Что будет, если пытаться складывать особую точку с какой-то другой по обычному правилу?

2. Докажите, что особую кубическую кривую можно (проективной) заменой координат привести к одной из кривых предыдущей задачи.

3. (**а**) Докажите, что из всех, кроме конечного числа, точек неособой кривой степени n можно провести ровно n^2-n-1 различных касательных к этой кривой.

(**б**) Пусть $n=3$. Проверьте, что через каждую точку перегиба неособой кубики проходят четыре касательные к ней, а через остальные точки — пять касательных.

4. (j-инвариант кубической кривой) Согласно предыдущей задаче в каждой точке p неособой кубической кривой C каноническим образом можно выделить четыре прямые: из пяти касательных, которые через неё проходят (посчитанных с кратностью, если это точка перегиба), надо выбросить одну — ту, что касается кривой в точке p.

(**а**) (Напоминание) Какие значения может принимать двойное отношение этих прямых (в зависимости от порядка следования прямых)?

(**б**) Укажите непостоянную рациональную функцию $j(x)$, которая не меняется при подстановках $x \mapsto 1-x$ и $x \mapsto 1/x$.

(**в**) Докажите, что если подставить в найденную Вами функцию $j(x)$ вместо x двойное отношение четвёрки прямых, выделенных для точки p, то результат не зависит от точки p.

5. (**а**) Докажите, что бирациональный изоморфизм из $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^1$ дробно-рационален.

(**б**) Придумайте бирациональный изоморфизм (проективного замыкания) кривой $y^2 = x(x+1)(x+2)$, у которого есть четыре неподвижные точки. (Из этого следует, что эта кривая не рациональна!)

6. (К вычислению рода кривой степени n) Докажите, что для n однородных многочленов $F_1, \ldots, F_n$ фиксированных степеней $d_1, \ldots, d_n$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ найдётся многочлен от их коэффициентов, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда у этих многочленов есть общий нуль, у которого не все координаты нулевые. (Эта задача станет очевидной через несколько лекций, но можно решить её и сейчас.)