1. (Формула Шлефли для уравнения кривой, двойственной к кубике) Пусть C — неособая кубика, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}^2$ уравнением $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. Обозначим через p_0, p_1, p_2 однородные координаты на $(\mathbb{P}^2)^\vee$ и положим

$$V(p,x) = \det\begin{pmatrix} 0 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_0 & f_{00} & f_{01} & f_{02} \\ p_1 & f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ p_2 & f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad G(p) = \det\begin{pmatrix} 0 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_0 & V_{00} & V_{01} & V_{02} \\ p_1 & V_{10} & V_{11} & V_{12} \\ p_2 & V_{20} & V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

где $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$.

Формула Шлефли: $G(p) = 0$ — уравнение кривой $C^\vee$.

Доказательство состоит из нескольких лемм.

(**а**) Пусть $\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) \in C$, обозначим через $K_\xi(x_0, x_1, x_2) = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, x_1, x_2)$ — уравнение «поляры к кривой в точке ξ». Докажите, что $V(p,x) = 0$ тогда и только тогда, когда прямая, отвечающая p при проективной двойственности, касается K_ξ.

(**б**) Положим $C_p = \{x \mid V(p,x) = 0\}$. Докажите, что $G(p) = 0$ тогда и только тогда, когда прямая, отвечающая p, касается C_p.

(**в**) Пусть $x \in C$ — не точка перегиба. Докажите, что $x \in C_p$ и C_p касается C в точке x.

(**г**) Докажите формулу Шлефли.

2. Пусть C — кривая, задаваемая в однородных координатах на $\mathbb{P}^2$ уравнением $x_0^n + x_1^n = x_2^n$. Укажите для двойственной кривой $C^\vee$ (**а**) не обязательно алгебраическое уравнение; (**б**) алгебраическое уравнение.

3. Докажите, что $k[X \times Y] = k[X] \otimes_k k[Y]$ для замкнутых подмножеств $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$.

4. Опишите все изоморфизмы $f\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$.

5. Являются ли изоморфизмами отображения замкнутых множеств:

(**а**) $\{(x,y) \mid y = x^k\} \to \mathbb{A}^1\colon (x,y) \mapsto x$?

(**б**) $\{(x,y) \mid xy = 1\} \to \mathbb{A}^1\colon (x,y) \mapsto x$?

(**в**) $\mathbb{A}^1 \to \{(x,y) \mid y^2 = x^3\}\colon x \mapsto (x^2, x^3)$?

6. Докажите, что в топологии Зарисского замкнутое множество компактно, т. е. из любого покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.