1. Докажите, что $V(f_1) = V(f_2)$ для неприводимых многочленов f_1 и f_2 тогда и только тогда, когда эти многочлены получаются друг из друга умножением на константу.

2. Является ли подмножество $V(x^2+y^2+z^2, x^2-y^2-z^2+1) \subset \mathbb{A}^3$ неприводимым?

3. (**а**) Сколько неприводимых компонент у подмножества $V(y^2 = xz, z^2 = y^3) \subset \mathbb{A}^3$? (**б**) Докажите, что все эти неприводимые компоненты рациональны.

4. Докажите, что неприводимая квадрика в $\mathbb{A}^n$ рациональна.

5. Докажите, что поверхность $V(x^3+y^3+z^3-1) \subset \mathbb{A}^3$ рациональна.

6. Докажите, что если $A \subset B$ — целое расширение колец и $B \subset C$ — целое расширение колец, то то $A \subset C$ — целое расширение колец.

7. Пусть X — замкнутое множество, G — конечная группа его автоморфизмов. Рассмотрим подалгебру $A = k[X]^G$, состоящую из инвариантных регулярных функций.

(**а**) Докажите, что алгебра A конечно порождена. (Указание: усредните мономы от образующих алгебры $k[X]$ по группе и докажите, что результат достаточно большой степени выражается через предыдущие.)

Из этого следует, что алгебре A соответствует замкнутое множество Y (для которого $A = k[Y]$) вместе с сюръекцией $\varphi\colon X \to Y$ (отвечающим вложению подалгебры).

(**б**) Докажите, что точку x_1 можно действием группы перевести в точку x_2, если и только если $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, т. е. Y отождествляется с множеством орбит X/G.

(**в**) Найдите Y, если $X = \mathbb{A}^n$, $G = S_n$ действует перестановками координат.

(**г**) Найдите Y, если $X = \mathbb{A}^2$, $G = \langle \tau \rangle$, $\tau(x, y) = (-x, -y)$.