1. Докажите лемму Нётер о нормализации для конечного основного поля.

2. Докажите, что однородный идеал $I \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ определяет пустое подмножество $\mathbb{P}^n$ если и только если для некоторого m он содержит все мономы степени не меньше m.

3. Докажите, что $X \leftrightarrow X \cap \{x_0 \neq 0\}$ — взаимно однозначное соответствие между неприводимыми замкнутыми подмножествами $X \subset \mathbb{P}^n$, не лежащими в гиперплоскости $x_0 = 0$, и неприводимыми замкнутыми подмножествами $\mathbb{A}^n = \{x_0 \neq 0\}$.

4. Докажите, что неприводимые многообразия X и Y бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда они содержат изоморфные открытые подмножества.

5. (**а**) Докажите, что рациональное отображение из $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^n$ регулярно. (**б**) Докажите, что регулярные отображения из $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{A}^n$ — только константы.

6. Какие из следующих квазипроективных многообразий аффинны? (**а**) $\mathbb{A}^1 \setminus \mathrm{pt}$; (**б**) $\mathbb{A}^2 \setminus \mathrm{pt}$; (**в**) $\mathbb{P}^1 \setminus \mathrm{pt}$; (**г**) $\mathbb{P}^2 \setminus \mathrm{pt}$.

7. (Теорема о замкнутости образа) Цель этой задачи — доказать, что образ проективного многообразия при регулярном отображении замкнут.

(**а**) Докажите, что свойство подмножества $Y \subset X$ квазипроективного многообразия X быть замкнутым *локально*, т. е. если $\cup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие X и Y замкнуто в каждом из U_α, то Y замкнуто в X.

Докажите следующие утверждения:

(**б**) График регулярного отображения квазипроективных многообразий замкнут.

(**в**) (Основное утверждение) Проекция $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ переводит замкнутые множества в замкнутые.

(**г**) Если Y аффинно, то проекция $\mathbb{P}^n \times Y \to Y$ переводит замкнутые множества в замкнутые.

(**д**) Если Y квазипроективно, то проекция $\mathbb{P}^n \times Y \to Y$ переводит замкнутые множества в замкнутые.

(**е**) Если X проективно, а Y квазипроективно, то проекция $X \times Y \to Y$ переводит замкнутые множества в замкнутые.

(**ж**) Выведите из доказанных утверждений теорему о замкнутости образа.