ЛЕКЦИЯ 1

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является двумерным векторным пространством над $\mathbb{R}$. Отождествим его с $\mathbb{R}^2$, выбрав базис $e_1 = 1$, $e_2 = i$. С каждым комплексным числом $q \in \mathbb{C}$ связан линейный оператор M_p умножения на это число: $M_q(z) \stackrel{\text{def}}{=} pz$ для всякого $z \in \mathbb{C}$. Если $q = a + bi$, то в базисе $1, i$ этот оператор задается матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Такой оператор является композицией растяжения в $|q| = \sqrt{a^2+b^2}$ раз и поворота на угол $\arg(q) = \operatorname{arctg}(b/a)$. Этот оператор либо равен нулю, либо сохраняет углы между векторами и ориентацию плоскости. Несложно доказать, что верно и обратное: всякий ненулевой линейный оператор $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющий углы и ориентацию, является оператором умножения на комплексное число.

Говорят, что отображение $f : M \to N$ двух гладких многообразий принадлежит классу C^1, если у него в каждой точке $m \in M$ существует производная — линейный оператор $Df(m) : T_m M \to T_{f(m)} N$, и эта производная непрерывно зависит от точки m.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество (область). Отображение $f : \Delta \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной функцией*, если оно, во-первых, принадлежит классу C^1 (и $\mathbb{C}$, и Δ — двумерные многообразия, поэтому понятие имеет смысл), а во-вторых, для всякого $p \in \Delta$ существует конечный предел $f'(p) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to p} \frac{f(z)-f(p)}{z-p}$ (называемый производной функции f в точке p).

Пример 1 (голоморфных функций). Все многочлены ($\Delta = \mathbb{C}$), дробно-рациональные функции (Δ — область определения, т.е. дополнение к множеству нулей знаменателя); $f(z) = e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y)$ ($\Delta = \mathbb{C}$). Формулы для производных — в точности такие же, как для вещественных функций одного переменного (и доказываются так же): $(z^n)' = nz^{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $(e^z)' = e^z$.

Пример 2 (неголоморфных функций класса C^1). $f(z) = \bar{z}$; $f(z) = |z|^2$.

Представим комплексные числа z и $f(z)$ как сумму действительной и мнимой частей: $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Касательные пространства $T_a\Delta$ и $T_{f(a)}\mathbb{C}$ можно отождествить с $\mathbb{R}^2$ с помощью базиса $1, i$. Тогда производная $Df(p)$ изображается матрицей 2×2, а именно $Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(p) & \frac{\partial u}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(p) & \frac{\partial v}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$. С другой стороны, в силу голоморфности $f(z) - f(p) = f'(z)(z-p) + o(|z-a|)$, откуда следует, что $Df(p)$ должна быть оператором умножения на комплексное число $f'(p)$. Следовательно, мы доказали такое утверждение:

Теорема 1 (условия Коши–Римана, классическая форма). *Функция $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ является голоморфной тогда и только тогда, когда вещественные функции u и v принадлежат классу C^1 и удовлетворяют уравнениям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.*

Следствие. *И вещественная, и мнимая часть голоморфной функции являются гармоническими функциями:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Можно показать (мы не будем этого делать), что верно и обратное: всякая функция, гармоническая в некоторой окрестности точки $p \in \mathbb{C}$, является вещественной частью голоморфной функции, определенной в некоторой (возможно, меньшей) окрестности точки p.

В приведенных терминах производная голоморфной функции выражается формулой $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Альтернативная формулировка той же теоремы:

Теорема 1′ (условия Коши–Римана, конформность). *Функция $f : \Delta \to \mathbb{C}$ голоморфна тогда и только тогда, когда она принадлежит классу C^1 и ее производная в произвольной точке $p \in \Delta$ — линейный оператор, либо равный нулю, либо сохраняющий углы и ориентацию.*

Произвольное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, обладающее свойствами, описанными в этой теореме, называется конформным. Таким образом, при $n = 2$ конформность и голоморфность это одно и то же.

Кокасательное пространство $T_p^*\Delta$ состоит, по определению, из всех линейных функционалов $\nu : T_p\Delta \to \mathbb{R}$; размерность его равна 2, а базис в нем составляют функционалы $dx(p)$ и $dy(p)$, где $x : \Delta \to \mathbb{R}$ и $y : \Delta \to \mathbb{R}$ — функции, сопоставляющие произвольной точке $z \in \Delta$ ее действительную и мнимую часть; в дальнейшем в обозначениях мы не будем указывать точку p. *Комплексифицированное кокасательное пространство* $T_p^*\Delta \otimes \mathbb{C}$ состоит из всех $\mathbb{R}$-линейных отображений $T_p\Delta \to \mathbb{C}$. Это векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности 4 с базисом dx, dy, idx, idy; одновременно это и векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности 2 с базисом dx, dy. Обычно рассматривают другой $\mathbb{C}$-базис: $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$.

Касательное пространство $T_p\Delta$ является двумерным векторным пространством над $\mathbb{R}$. В нем можно, кроме того, определить структуру одномерного векторного пространства над $\mathbb{C}$. Для этого нужно описать оператор умножения $M_q : T_p\Delta \to T_p\Delta$ на произвольное комплексное число, и это делается очевидным образом: если кривая $\gamma(t) \subset \Delta$, $\gamma(0) = p$, представляет касательный вектор $v \in T_p\Delta$, то вектор $M_q v$ представляется кривой $\gamma_q(t) = p + q(\gamma(t) - p)$. Назовем теперь элемент $\nu \in T_p^*\Delta \otimes \mathbb{C}$ *ковектором типа* $(1,0)$, если $\nu(M_q v) = M_q \nu(v)$ для всякого $q \in \mathbb{C}$ и $v \in T_p\Delta$. Примером ковектора типа $(1,0)$ является dz, а $d\bar{z}$ — не является. Ковектор $d\bar{z}$ удовлетворяет равенству $\nu(M_q v) = M_{\bar{q}}\nu(v)$ — такие ковекторы называются ковекторами типа $(0,1)$. Ковекторы типа $(1,0)$ (соотв. типа $(0,1)$) образуют одномерное векторное пространство $T_p^{(1,0)}\Delta$ (соотв. $T_p^{(0,1)}\Delta$) над $\mathbb{C}$, ковектор dz (соотв. $d\bar{z}$) является в нем базисом. Следовательно, $T_p^*\Delta \otimes \mathbb{C} = T_p^{(1,0)}\Delta \oplus T_p^{(0,1)}\Delta$.

Для произвольной (не обязательно голоморфной) функции $f : \Delta \to \mathbb{C}$ класса C^1 можно определить ее дифференциал df: это комплекснозначная 1-форма (то есть сечение расслоения $T^*\Delta \otimes \mathbb{C}$), значение которой в точке $p \in \Delta$ есть элемент $df(p) \in T_p^* \otimes \mathbb{C}$, заданный формулой $df(p)(v) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$, где $\gamma(t)$ — кривая, представляющая вектор v. В координатах получается так: если $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$$
\begin{aligned}
df &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = \\
&= \frac{1}{2}\left((\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \right)(dx + idy) + \frac{1}{2}\left((\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \right)(dx - idy)
\end{aligned}
$$

Коэффициенты при $dz = dx + idy$ и при $d\bar{z} = dx - idy$ в этом равенстве обозначаются, соответственно, $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

Для голоморфной функции коэффициент при $d\bar{z} = dx - idy$ равен нулю согласно условию Коши–Римана. Коэффициент при $dz = dx + idy$ для голоморфной функции равен $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$. То есть доказана

Теорема 1$''$ (условия Коши–Римана, формулировка с $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$). *Функция $f : \Delta \to \mathbb{C}$ голоморфна тогда и только тогда, когда она принадлежит классу C^1 и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.*

Или, эквивалентно:

Теорема 1$'''$ (условия Коши–Римана, формулировка с 1-формой). *Функция $f : \Delta \to \mathbb{C}$ голоморфна тогда и только тогда, когда для всякого $p \in \Delta$ ковектор $df(p)$ имеет тип $(1,0)$. Если функция f голоморфна, то $df(z) = f'(z)\,dz$.*

Рассмотрим теперь комплекснозначную 1-форму типа $(1,0)$, то есть выражение вида $\nu = f(z)\,dz$, где f — комплекснозначная функция класса C^1 (не обязательно голоморфная). По линейности и кососимметричности получаем, что $d\nu = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$. Следовательно, еще одна формулировка условий Коши–Римана:

Теорема 1$^{\mathrm{IV}}$ (условия Коши–Римана, условие замкнутости). *Функция $f : \Delta \to \mathbb{C}$ класса голоморфна тогда и только тогда, когда она принадлежит классу C^1 и 1-форма $f(z)\,dz$ замкнута.*

Следствие (теорема Коши). *Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}$ — область с кусочно-гладкой границей $\partial\Delta$, а $f : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, ограничение которой на Δ голоморфно. Тогда $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим кривую (или совокупность кривых, если $\partial\Delta$ состоит из нескольких компонент связности) γ_ε, лежащую внутри области Δ на расстоянии не более ε от границы. Форма $f(z)\,dz$ на области Δ замкнута по теореме 1^{IV}, откуда $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$ по теореме Стокса. Устремляя $\varepsilon \to 0$ и пользуясь непрерывностью f, получим требуемый результат. $\square$

Пример 3 (применения теоремы Коши). Вычислим $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$. Для этого рассмотрим область U_R — полукруг с центром в начале координат, радиуса R и лежащий в верхней полуплоскости. Граница области ∂U_R состоит из отрезка $[-R,R] \subset \mathbb{R}$ и полуокружности ω_R. Очевидно, $\max_{x\in\omega_R} |\frac{1}{1+x^2}| = o(1/R)$ при $R \to \infty$, а длина ω_R равна πR откуда $\int_{\omega_R} \frac{dx}{1+x^2} \to 0$ при $R \to \infty$. Следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial U_R} \frac{dx}{1+x^2}$.

Рассмотрим теперь область $\Delta_{Rr} = U_R \setminus \Omega_r$, где Ω_r — круг радиуса r с центром в точке i. Очевидно, в Δ_{Rr} функция $1/(x^2+1)$ голоморфна, и по теореме Коши $\int_{\partial\Delta_R} \frac{dx}{1+x^2} = 0$. Отсюда вытекает, что $\int_{\partial U_R} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\partial\Omega_r} \frac{dx}{1+x^2}$.

Имеет место равенство $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$. Второе слагаемое в скобке — функция, голоморфная в круге Ω_r, поэтому по теореме Коши $\int_{\partial\Omega_r} \frac{dx}{x+i} = 0$. Следовательно, $\int_{\partial\Omega_r} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega_r} \frac{dx}{x-i}$. Окружность $\partial\Omega_r$ можно представить как кривую $\gamma(t) = i + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, откуда $\int_{\partial\Omega_r} \frac{dx}{x-i} = \int_0^{2\pi} \gamma(t)^* \frac{dx}{x-i} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\,dt = 2\pi i$. Окончательно, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.