ЛЕКЦИЯ 10

Пусть X — комплексная кривая рода 1, и ν — голоморфная 1-форма без нулей. Поскольку ν голоморфна, она замкнута, и тем самым $\int_\gamma \nu$ зависит только от гомотопического класса замкнутой кривой $\gamma : [0,1] \to X$. Поскольку $\int_{\gamma_1\cdot\gamma_2} \nu = \int_{\gamma_1} \nu + \int_{\gamma_2} \nu$, где умножение понимается в смысле $\pi_1(X)$, получается, что отображение $\gamma \mapsto \int_\gamma \nu$ является гомоморфизмом групп $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(X) \to \mathbb{C}$. Образом этого гомоморфизма является некоторая аддитивная подгруппа $L \subset \mathbb{C}$.

Предложение 1. *X биголоморфно эквивалентна $\mathbb{C}/L$.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{C}/L'$ для некоторой решетки $L' \subset \mathbb{C}$, порожденной векторами $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$. Тогда $\nu = \lambda p^* dz$, где $p : \mathbb{C} \to X$ — естественная проекция, а $\lambda \in \mathbb{C}$. Образующими группы $\pi_1(X) = L'$ являются кривые $\gamma_1(t) = p(t\eta_1)$ и $\gamma_2(t) = p(t\eta_2)$, $0 \le t \le 1$. Очевидно, $\int_{\gamma_i} \nu = \lambda\eta_i$, откуда вытекает, что $L = \lambda L'$, и $\mathbb{C}/L$ и $X = \mathbb{C}/L'$ биголоморфно эквивалентны. □

Предложение 2. *Всякая эллиптическая кривая является римановой поверхностью алгебраической функции вида $\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$, где e_1, e_2, e_3 попарно различны.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — эллиптическая кривая, в которой решетка L порождена векторами η_1 и η_2, а A — риманова поверхность функции $\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}$, где $e_1 = \wp(\eta_1/2)$, $e_2 = \wp(\eta_2/2)$, $e_3 = \wp((\eta_1+\eta_2)/2)$. Рассмотрим отображение $f(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\wp(z), \wp'(z))$. Согласно теореме 2 лекции 9, $f : X \to A$. Покажем, что для точки общего положения $(x,y) \in A$ прообраз $f^{-1}(A)$ состоит из 1 точки. Действительно, если $\wp(z_1) = \wp(z_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} r$ и $z_1 \ne z_2$, то $\wp^{-1}(r) = \{z_1, z_2\}$. Но поскольку $\wp(-z_1) = \wp(z_1)$ (все сложения и сравнения делаются в $\mathbb{C}/L$), то $z_2 = -z_1$. Поэтому $\wp'(z_1) = -\wp'(z_2) \ne \wp'(z_2)$ для точек общего положения. Следовательно, $f : X \to A$ — разветвленное накрытие степени 1, то есть биголоморфный автоморфизм. □

Следствие. *Многозначная функция $f(x) \stackrel{def}{=} -\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}$ является обратной к $\wp$.*

Обозначим $G_n = \sum_{u\in L\setminus\{0\}} 1/u^{2n}$. Очевидно, при $n \ge 2$ этот ряд абсолютно сходится.

Предложение 3. *Эллиптическая кривая $\mathbb{C}/L$ биголоморфно эквивалентна римановой поверхности функции $\sqrt{4z^3 - 60G_2z - 140G_3}$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что разложение функции $\wp(z)$ в ряд Лорана в точке $z = 0$ есть $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_2z^2 + 5G_3z^4 + \dots$. Отсюда $\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_2}{z^2} - 80G_3 + \dots$, $4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_2) = \frac{4}{z^6} - 4(e_1+e_2+e_3)\frac{1}{z^4} + 4(e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3+9G_2)\frac{1}{z^2} + (-4e_1e_2e_3 + 24G_2(e_1+e_2+e_3) + 60G_3) + \dots$, откуда $e_1+e_2+e_3 = 0$, $e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3 = -15G_2$ и $e_1e_2e_3 = -35G_3$. Результат вытекает теперь из предложения 2. □

Рассмотрим теперь в верхней полуплоскости H риманову метрику $g = -\frac{dz\,d\bar z}{(z-\bar z)^2}$; в “вещественных” координатах x, y, где $z = x + iy$, получается $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Порождаемая римановой метрикой g структура метрического пространства в H это метрика (расстояние) Лобачевского.

Предложение 4. *Все биголоморфные автоморфизмы кривой H сохраняют метрику g (и, следовательно, расстояние Лобачевского).*

Доказательство. Вычисление: $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ — следовательно, $\bar w = \frac{a\bar z+b}{c\bar z+d}$, $(w-\bar w)^2 = \frac{(ad-bc)^2}{(cz+d)^2(c\bar z+d)^2}(z-\bar z)^2$, $dw = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}dz$, $d\bar w = \frac{ad-bc}{(c\bar z+d)^2}d\bar z$, откуда и получаем требуемое. □

Следствие. *Кривизна римановой метрики g постоянна.*

Доказательство. Группа изометрий метрики g действует транзитивно на точках верхней полуплоскости. □

Поскольку единичный круг Δ биголоморфно эквивалентен верхней полуплоскости, аналоги предложения 4 и следствия имеет место и для него. Несложное вычисление (проделайте !) показывает, что инвариантная риманова метрика выглядит так: $g = \frac{dz\,d\bar z}{(1-|z|^2)^2}$.

Теорема 1. *Произвольное голоморфное отображение $f : \Delta \to \Delta$ не увеличивает расстояние Лобачевского. Если оно сохраняет расстояние хотя бы между одной парой точек, то оно обратимо (является биголоморфным изоморфизмом).*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in \Delta$, ϱ — расстояние Лобачевского. Всякую точку единичного круга можно перевести в 0 биголоморфным автоморфизмом, который, согласно предложению 4, сохраняет метрику. Следовательно, можно считать без ограничения общности, что $z_1 = 0$ и $f(z_1) = 0$.

Поскольку биголоморфные автоморфизмы Δ, сохраняющие 0, являются поворотами вокруг 0, имеем $\varrho(0, z) = \mu(|z|)$, где $\mu(t)$ — монотонная функция (на самом деле $\mu(t) = \ln \frac{1+t}{1-t}$, но нам это неважно). Тогда неравенство $\varrho(f(0), f(z_2)) = \varrho(0, f(z_2)) \le \varrho(0, z_2)$ эквивалентно неравенству $|f(z_2)| \le |z_2|$, которое вытекает из леммы Шварца. Из той же леммы Шварца вытекает и второе утверждение теоремы. □

Пусть теперь X — произвольная комплексная кривая, а $\pi : U \to X$ — ее голоморфное универсальное накрытие.

Предложение 5. *Если $U = \mathbb{C}P^1$, то $X = \mathbb{C}P^1$. Если $U = \mathbb{C}$, то X биголоморфно эквивалентно $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ или эллиптической кривой. Во всех остальных случаях $U = \Delta$ (тогда X называется гиперболической кривой).*

Доказательство. Альтернатива $U = \mathbb{C}P^1$, $U = \mathbb{C}$ или $U = \Delta$ вытекает из теоремы Кебе. Случай $U = \mathbb{C}P^1$ разобран в предложении 2 лекции 6. Пусть теперь $U = \mathbb{C}$. Тогда $X = \mathbb{C}/G$, где G — группа биголоморфных автоморфизмов $\mathbb{C}$, то есть линейных неоднородных отображений, действующая свободно дискретно. В частности, всякое отображение $f \in G$ не имеет неподвижных точек, а следовательно, является параллельным переносом. Группа всех параллельных переносов коммутативна; ее подгруппа G действует свободно дискретно, очевидно, в следующих случаях: $G = \{e\}$, $G = \mathbb{Z}$ порождена одним произвольным переносом, $G = \mathbb{Z}^2$ и порождена двумя переносами на неколлинеарные (над $\mathbb{R}$) векторы. Это в точности соответствует $X = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $X = \mathbb{C}/L$, где L — решетка. □

Если кривая X гиперболическая, то $X = \Delta/G$, где G — группа биголоморфных автоморфизмов Δ, то есть преобразований, сохраняющих метрику Лобачевского. Тем самым метрика Лобачевского на Δ индуцирует риманову метрику на X. Эта метрика (называемая гиперболической) имеет постоянную кривизну (поскольку кривизна — понятие локальное, а локально X изометрично Δ) и обладает следующим свойством, вытекающим из теоремы 1:

Теорема 1′. *Голоморфное отображение $f : X_1 \to X_2$ двух гиперболических кривых не увеличивает расстояния между точками в гиперболической метрике $\varrho_2(f(p), f(q)) \le \varrho_1(p, q)$; для биголоморфных изоморфизмов имеет место равенство. Если для хотя бы одной пары точек имеет место равенство, то f является изометрией и биголоморфным изоморфизмом.*

Теорема 2 (большая теорема Пикара). *Пусть $f : \Delta \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, имеющая в 0 существенную особенность. Тогда в любой окрестности 0 функция f принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Предположим противное: $f(z) \ne c_1, c_2$ в достаточно малом круге с центром в начале координат; без ограничения общности можно считать, что этот круг есть Δ. Зафиксируем $c \ne c_1, c_2$. По теореме Сохоцкого существует последовательность $z_n \to 0$ такая, что $f(z_n) \to c$.

Проведем через каждую точку z_n окружность ω_n с центром в нуле. Кривая $\Delta \setminus \{0\}$ — гиперболическая, поскольку имеется накрытие $\varphi : H \to \Delta \setminus \{0\}$, действующее по правилу $\varphi(z) = e^{iz}$. Окружность ω_n является образом при отображении φ отрезка с концами $-i \ln |z_n|$ и $2\pi - i \ln |z_n|$. Следовательно, длина окружности ω_n в гиперболической метрике равна длине этого отрезка в метрике Лобачевского, то есть $-2\pi/\ln |z_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для всякой точки $w \in \omega_n$ имеем $\varrho(w, z_n) \le -2\pi/\ln |z_n| \to 0$, где ϱ — гиперболическая метрика.

Кривая $\mathbb{C} \setminus \{c_1, c_2\}$ — гиперболическая, поэтому $\varrho(f(w), f(z_n)) \le \varrho(w, z_n) \le -2\pi/\ln |z_n| \to 0$. Следовательно, в силу непрерывности f для некоторого R и произвольного достаточно большого n имеет место неравенство $|f(w)| \le R$. Согласно принципу максимума модуля, это неравенство выполняется также и в кольце, ограниченном окружностями ω_n и ω_{n+1}, если n достаточно велико — следовательно, и в некоторой окрестности точки 0. Отсюда вытекает, что особенность функции f в точке 0 — устранимая, вопреки предположению. □

Следствие (малая теорема Пикара). *Всякая целая (то есть голоморфная на $\mathbb{C}$) функция принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Если функция f — многочлен, то это вытекает из основной теоремы алгебры. Если функция f многочленом не является, то $g(z) = f(1/z)$ имеет существенную особенность в нуле, и результат вытекает из большой теоремы Пикара. □

Замечание. Неравенство $f(z) \neq c$ для *одного* значения c в окрестности существенной особенности возможно: так, $e^{1/z} \neq 0$ в произвольной окрестности точки $z = 0$.