ЛЕКЦИЯ 11

Определим функцию $k^2 : H \to \mathbb{C}$ следующим образом. Пусть $\eta \in H$. Рассмотрим решетку $L \subset \mathbb{C}$, порожденную числами 1 и η; этой решетке соответствует эллиптическая кривая $\mathcal{E}_L$, имеющая 3 точки второго порядка $u_1 = 1/2$, $u_2 = \eta/2$ и $u_3 = (1+\eta)/2$. (Заметим, что нумерация точек второго порядка фиксирована !) Пусть $\wp$ — функция Вейерштрасса решетки L, и $e_1 = \wp(u_1)$, $e_2 = \wp(u_2)$ и $e_3 = \wp(u_3)$. В этом случае кривая $\mathcal{E}_L$ изоморфна римановой поверхности уравнения $w^2 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$. Положим по определению $k^2(\eta) = (e_1 - e_2)/(e_1 - e_3)$.

Обозначим теперь $L_1 = \langle 1, \eta_1\rangle$ и $L_2 = \langle 1, \eta_2\rangle$.

Теорема 1. *$k^2(\eta_1) = k^2(\eta_2)$ тогда и только тогда, когда между эллиптическими кривыми $\mathcal{E}_{L_1}$ и $\mathcal{E}_{L_2}$ имеется биголоморфный изоморфизм, переводящий 0 в 0 и сохраняющий нумерацию точек второго порядка.*

Для доказательства теоремы нам потребуется

Лемма 1. *Пусть $f : \mathcal{E}_L \to \mathbb{C}$ — мероморфная функция, имеющая в точке 0 единственный полюс порядка 2, а других полюсов не имеющая. Тогда $f = a\wp + b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$.*

(Обратное, конечно, тоже верно, если $a \neq 0$)

Доказательство. Пусть ряд Лорана функции f в окрестности точки 0 начинается с члена a/z^2. Тогда функция $g(z) = f(z) - a\wp(z)$ имеет в точке 0 полюс порядка не выше 1, и больше полюсов не имеет. Поскольку мероморфная функция на $\mathcal{E}_L$ не может иметь один полюс порядка 1, функция $g : \mathcal{E}_L \to \mathbb{C}$ голоморфна, то есть постоянна: $g(z) = f(z) - a\wp(z) = b$. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $F : \mathcal{E}_{L_1} \to \mathcal{E}_{L_2}$ — указанный изоморфизм, $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{E}_{L_1}$ и $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{E}_{L_2}$ — точки второго порядка. Тогда $k^2(\eta_2) = (\wp_{L_2}(v_1) - \wp_{L_2}(v_2))/(\wp_{L_2}(v_1) - \wp_{L_2}(v_3)) = (f(u_1) - f(u_2))/(f(u_1) - f(u_3))$, где $f = \wp_{L_2} \circ F$. Функция f мероморфна с единственным полюсом порядка 2 в точке 0 — следовательно, согласно лемме 1, $f(z) = a\wp_{L_1}(z) + b$, и $k^2(\eta_2) = (\wp_{L_1}(u_1) - \wp_{L_1}(u_2))/(\wp_{L_1}(u_1) - \wp_{L_1}(u_3)) = k^2(\eta_1)$.

Эллиптические кривые $\mathcal{E}_{L_1}$ и $\mathcal{E}_{L_2}$ изоморфны римановым поверхностям уравнений $w^2 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$ и $w^2 = 4(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)$, где $e_i = \wp_{L_1}(u_i)$ и $p_i = \wp_{L_2}(v_i)$. Равенство $k^2(\eta_2) = k^2(\eta_1)$, то есть $(e_1 - e_2)/(e_1 - e_3) = (p_1 - p_2)/(p_1 - p_3)$, означает, что имеются такие константы $a, b \in \mathbb{C}$, что $p_i = ae_i + b$ при $i = 1, 2, 3$. Отображение $z \mapsto az + b$, $w \mapsto a^{3/2}w$ осуществляет биголоморфный изоморфизм этих поверхностей. Этот изоморфизм сохраняет нумерацию точек второго порядка, поскольку прообраз $\wp^{-1}(e_i)$ состоит из единственной точки u_i при $i = 1, 2, 3$. □

Теорема 2. *Изоморфизм, упомянутый в теореме 1 существует тогда и только тогда, когда $\eta_2 = \frac{a\eta_1 + b}{c\eta_1 + d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, a, d нечетны, b, c четны, и $ad - bc = 1$.*

Для доказательства используем лемму:

Лемма 2. *Эллиптические кривые $\mathcal{E}_{L_1}$ и $\mathcal{E}_{L_2}$ биголоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда $L_2 = \lambda L_1$ для некоторого $\lambda \neq 0$.*

Доказательство. Если $L_2 = \lambda L_1$, то отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $f(z) = \lambda z$, порождает биголоморфный изоморфизм $\mathcal{E}_{L_1} \to \mathcal{E}_{L_2}$. Обратно, пусть $\varphi : \mathcal{E}_{L_1} \to \mathcal{E}_{L_2}$ — биголоморфный изоморфизм. Тогда он поднимается до биголоморфного автоморфизма $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ универсальных накрытий. Без ограничения общности можно считать, что $f(0) = 0$, откуда $f(z) = \lambda z$ для некоторого $\lambda \neq 0$ согласно теореме 1 лекции 4. □

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 2 кривые $\mathcal{E}_{L_1}$ изоморфны $\mathcal{E}_{L_2}$ тогда и только тогда, когда найдется константа $\lambda \in \mathbb{C}$, для которой $\lambda\langle 1, \eta_2\rangle = \langle 1, \eta_1\rangle$, то есть $\lambda, \lambda\eta_2 \in \langle 1, \eta_1\rangle$. Иными словами, $\lambda = c\eta_1 + d$, $\lambda\eta_2 = a\eta_1 + b$ для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, откуда $\eta_2 = \frac{a\eta_1 + b}{c\eta_1 + d}$.

Поскольку изоморфизм сохраняет, по условию, нумерацию точек второго порядка, точка $v_1 = 1/2$ переходит в точку $\lambda/2 = 1/2(c\eta_1 + d)$, которая должна быть сравнима с точкой $u_1 = 1/2$ по модулю решетки L_1. Тем самым $1/2(c\eta_1 + d) - 1/2 = p\eta_1 + q$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Z}$, откуда $c = 2p$ — четно, и $d = 2q + 1$ — нечетно. Для a и b доказательство аналогично. □

Дробно-линейные преобразования, описанные в теореме 2, образуют группу $\Gamma(2)$, действующую биголоморфными автоморфизмами на верхней полуплоскости. $\Gamma(2)$ — подгруппа группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Из теорем 1 и 2 вытекает, тем самым, что $k^2(\eta_1) = k^2(\eta_2)$ тогда и только тогда, когда η_1 и η_2 принадлежат одной и той же орбите группы $\Gamma(2)$.

Теорема 3. *Группа $\Gamma(2)$ действует на верхней полуплоскости свободно дискретно, так что отображение факторизации $H \to H/\Gamma(2)$ является накрытием.*

Доказательство. Пусть $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$ — две дроби в несократимом представлении; мы разрешаем здесь числитель 0. Назовем фареевским средним этих дробей дробь $(p+r)/(q+s)$; нетрудно видеть, что если $p/q < r/s$, то $p/q < (p+r)/(q+s) < r/s$. Нарисуем теперь на вещественной оси числа $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и для каждой пары $(n, n+1)$ нарисуем треугольник Лобачевского с вершинами $n, n+1, \infty$. Далее между каждыми двумя точками $n.n+1$ впишем их фареевское среднее $(2n+1)/2$ и нарисуем треугольник Лобачевского с вершинами $n, (2n+1)/2, n+1$; потом для каждых двух соседних точек полученного ряда — их фареевское среднее, и нарисуем треугольник, и т.д. Получится триангуляция верхней полуплоскости. Нетрудно видеть, что выполнены такие утверждения:

Лемма 3. *Следовательно, множество вершин триангуляции это множество всех рациональных чисел. Два рациональных числа p/q и r/s являются вершинами одного и того же треугольника тогда и только тогда, когда $ps - rq = \pm 1$.*

Доказательство. Начиная с целых чисел и применяя операцию взятия фареевского среднего n раз, мы получим все рациональные числа со знаменателями, не превосходящими n. Этим доказано первое утверждение. Второе получается индукцией: $(p+r)q - (q+s)p = -(ps - rq)$. $\square$

Если $p_1/q_1 = (ap+b)/(cp+d)$ и $r_1/s_1 = (ar+b)/(cs+d)$, то $p_1 s_1 - r_1 q_1 = (ad-bc)(ps-rq) = \pm 1$, откуда вытекает, что действие группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathbb{Q}$ сохраняет отношение фареевского среднего. Поскольку оно переводит прямые Лобачевского в прямые Лобачевского, оно сохраняет триангуляцию. То же относится и к подгруппе $\Gamma(2) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Докажем теперь такую лемму:

Лемма 4. *Преобразования $g \in \Gamma(2)$, $g \neq 1$, не имеют неподвижных точек (являются гиперболическими или параболическими).*

Доказательство. Предположим обратное: пусть $z = \frac{az+b}{cz+d} \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Поскольку $z \in H$, дискриминант многочлена отрицателен: $(d-a)^2 + 4bc < 0$. Поскольку $ad - bc = 1$, получаем $(d-a)^2 + 4ad < 4 \iff (d+a)^2 < 4$. Поскольку a и d — нечетные целые числа, это возможно только при $d = -a$. Но тогда $1 = -a^2 - bc$. Числа b и c четные, так что отсюда вытекает, что $a^2 \equiv -1 \bmod 4$, что невозможно. $\square$

Рассмотрим теперь точку $z \in H$, лежащую в некотором треугольнике T триангуляции. Для всякого $g \in \Gamma(2)$ образ $g(T)$ также является треугольником триангуляции. Равенство $g(T) = T$ при $g \neq 1$ невозможно, т.к. в этом случае преобразование g имеет в T неподвижную точку по теореме Брауэра. Следовательно, если взять окрестность U точки z настолько малую, что она лежит целиком в треугольнике T, то ее образы $g(U)$ под действием различных преобразований $g \in \Gamma(2)$ лежат в попарно различных треугольниках и не пересекаются. Это и означает, что действие свободно дискретно. $\square$

Теорема 4. *Отображение k^2 является голоморфным накрытием $H \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.*

Доказательство. Пусть $L = \langle 1, \eta \rangle$. Поскольку ряд $e_1(\eta) = \wp(1/2) = \frac{1}{4} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(1/4 - m - n\eta)^2} - \frac{1}{(m+n\eta)^2} \right)$ сходится равномерно по η, его сумма голоморфна; то же самое верно и для функций $e_2(\eta)$ и $e_3(\eta)$. Следовательно, функция $k^2(\eta)$ мероморфна. Но поскольку числа e_1, e_2, e_3 попарно различны, она не принимает значений 0, 1 и ∞.

Пусть $(k^2)'(p) = 0$ для некоторой точки $p \in H$. Это означает, что $k^2(z) = q + (z-p)^m h(z)$, где $q \in \mathbb{C}$, $m \geq 2$, h голоморфна и $h(p) \neq 0$. Отсюда вытекает, что $k^2(z) - q = \varphi^m(z)$, где $\varphi(z) = (z-p)\sqrt[m]{h(z)}$ — функция, голоморфная в окрестности точки p. Следовательно, существуют точки $z_1 \neq z_2$, сколь угодно близкие к p (и, тем самым, друг к другу), для которых $k^2(z_1) = k^2(z_2)$. Из теоремы 2 вытекает, что $z_1 = gz_2$ для некоторого $g \in \Gamma(2)$, $g \neq 1$. Это противоречит теореме 3. Тем самым k^2 — (универсальное) накрытие.

Для любых трех попарно различных чисел e_1, e_2, e_3 рассмотрим риманову поверхность уравнения $y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$. Она является эллиптической кривой; функция x на ней — голоморфная с единственным полюсом порядка 2, принимающая в точках второго порядка значения e_1, e_2, e_3. Для такой кривой $k^2 = (e_1 - e_2)/(e_1 - e_3)$ может быть, очевидно, сделано любым числом, кроме 0 и 1. $\square$