ЛЕКЦИЯ 2

В дальнейшем нам придется несколько раз переходить к пределу под знаком интеграла; и для этого нам потребуются такие два утверждения:

Лемма 1. *При всяком натуральном n рациональная функция $\frac{1}{z^n}$ равномерно дифференцируема по z на любом компакте K, не содержащем точки 0.*

Доказательство. Имеем: $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(z+h)^n}-\frac{1}{z^n}\right)-\frac{n}{z^{n+1}}=\frac{hP_n(z,h)}{(z+h)^n z^n}$, где $P_n(z,h)$ — многочлен степени $n-2$. В силу непрерывности существуют такие константы $c_1, c_2>0$, что $|P_n(z,h)|<c_1$ и $|z^n(z+h)^n|>1/c_2$ при всех $z\in K$ и всех достаточно малых h. Отсюда следует, что $\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(z+h)^n}-\frac{1}{z^n}\right)-\frac{n}{z^{n+1}}\right|<c_1c_2\,|h|\rightrightarrows 0$. □

Лемма 2. *Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится к $1/(1-z)$ равномерно по z на любом компакте, лежащем в круге $\{z \mid |z|<1\}$.*

Доказательство аналогично.

Теорема 1. (1) *(интегральная формула Коши) Пусть $\Delta\subset\mathbb{C}$— область с компактной кусочно-гладкой границей $\partial\Delta$, $z\in\Delta$ — произвольная точка, а $f:\Delta\to\mathbb{C}$ — голоморфная функция, которую можно непрерывно продолжить на $\partial\Delta$. Тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$.*

(2) *(интеграл типа Коши) Если $\varphi:\partial\Delta\to\mathbb{C}$ — непрерывная функция, то функция $f:\Delta\to\mathbb{C}$, заданная равенством $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw$, голоморфна.*

Доказательство. Пусть $\gamma(t)=z+re^{it}$ — окружность малого радиуса r, лежащая целиком в области Δ. Тогда по теореме Коши $\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)}{z-w}\,dw=\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\int_0^{2\pi}\frac{f(z+re^{it})}{re^{it}}ire^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}f(z+re^{it})\,dt=if(z)\int_0^{2\pi}dt+i\int_0^{2\pi}(f(z+re^{it})-f(z))\,dt$. Второе слагаемое стремится к нулю при $r\to 0$, а поскольку первое слагаемое и сумма не зависят от r, то второе слагаемое тождественно равно нулю, и $\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)}{z-w}\,dw=2\pi i f(z)$.

Пусть теперь функция φ непрерывна. Из леммы 1 (при $n=1$) следует, что правую часть равенства $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw$ можно дифференцировать под знаком интеграла: $f'(z)=\frac{d}{dz}\int_{\partial\Delta}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw=\int_{\partial\Delta}\frac{d}{dz}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw=\int_{\partial\Delta}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^2}$. Тем самым функция f имеет производную, то есть голоморфна. □

Задача-предупреждение. Покажите, что если $z_0\in\partial\Delta$, то в условиях пункта 2 может оказаться, что $\lim_{z\to z_0}f(z)$ не существует или не равен $\varphi(z_0)$.

Следствие. *Пусть функция f голоморфна в области Δ. Тогда она имеет производные любого порядка $f^{(n)}$, все эти производные голоморфны в области Δ и задаются формулой $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$.*

Доказательство. Согласно лемме 1, интегральную формулу Коши можно продифференцировать под знаком интеграла произвольное количество раз. □

Для функций вещественной переменной ситуация, как известно, гораздо хуже: функция $g(x)=x^k\,|x|$ имеет в нуле k производных, но $(k+1)$-я не существует.

Еще одним следствием интегральной формулы Коши является

Теорема 2 (Лиувилля). *Функция, голоморфная на всем множестве $\mathbb{C}$ и ограниченная, является константой.*

Доказательство. Пусть Ω_R — круг радиуса R с центром в начале координат. Тогда согласно следствию теоремы 1, $f'(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Omega_R}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$, если $|z|<R$. Пусть $|f(z)|<M$, тогда $|f'(z)|<\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi R\cdot M\cdot\frac{1}{R^2}=\frac{2M}{R}$. Устремляя $R\to\infty$, получим $f'(z)=0$, откуда $f(z)=const$. □

Следствие ("основная теорема алгебры"). *Всякий многочлен положительной степени с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $P(z)$ — многочлен без корней. Без ограничения общности $P(z)=z^n+\dots$ (где многоточие — члены меньшей степени), откуда $|P(z)|\to\infty$ при $|z|\to\infty$. Поэтому найдется такое R, что при $|z|>R$ выполнено неравенство $|P(z)|>1$. Круг $\Omega_R=\{z \mid |z|\le R\}$ является компактом, поэтому непрерывная на нем функция $|P(z)|$ достигает своего минимального значения m. Поскольку P по предположению не имеет корней, $m>0$. Отсюда вытекает, что $|P(z)|>M=\min(m,1)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, $|1/P(z)| < 1/M$. Поскольку знаменатель выражения $1/P(z)$ нигде не обращается в нуль, функция $f(z) = 1/P(z)$ голоморфна на всей комплексной плоскости и ограничена. Следовательно, $f(z) = const.$ по теореме Лиувилля, откуда $P(z) = const.$ □

Для функций комплексной переменной, голоморфных в круге, имеет место утверждение еще более сильное, чем наличие производных любого порядка — аналитичность:

Теорема 3. *Пусть функция f голоморфна в круге D с центром в точке a. Тогда при $z \in D$ имеет место равенство $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве D. Коэффициенты c_n определены однозначно и вычисляются по формуле Тейлора $c_n = f^{(n)}(a)/n!$.*

Если функция f непрерывно продолжается на границу круга, то $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$. В любом случае вместо ∂D можно взять произвольную окружность ω, лежащую внутри круга. Теорема относится и к случаю, когда $R = \infty$, то есть круг это все множество $\mathbb{C}$.

Доказательство. Рассмотрим круг D_r с радиусом, слегка меньшим, чем у D, и с тем же центром a. Функция f голоморфна в круге D_r и продолжается на его границу, поэтому к ней применима интегральная формула Коши. Поскольку в этой $w \in \partial D_r$, а z лежит внутри круга, имеет место неравенство $|z-a| \,/\, |w-a| < 1$. Тогда $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$, причем согласно лемме 2 ряд сходится абсолютно, равномерно по z на любом компактном подмножестве D_r и равномерно по $w \in \partial D_r$. После умножения на непрерывную функцию $f(w)$ равномерная сходимость не нарушается, поэтому ряд можно интегрировать почленно: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$, причем абсолютная и равномерная сходимость ряда сохранится и после интегрирования. Осталось обозначить интеграл c_n и заметить, что $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ согласно следствию из теоремы 1. □

Тем самым для голоморфных функций невозможен пример типа знаменитой функции $g(x) = e^{-1/x^2}$, ряд Тейлора которой в нуле тождественно равен нулю.

Следствие 1. *Если функция f голоморфна на связном открытом множестве $\Delta \subset \mathbb{C}$ и равна нулю на некотором открытом подмножестве $U \subset \Delta$, то она равна нулю всюду на Δ.*

Доказательство. Следствие непосредственно очевидно, если Δ — круг, а U содержит его центр: в этом случае ряд Тейлора функции f равен нулю. Для доказательства общего утверждения нужно покрыть Δ конечным или счетным множеством кругов так, чтобы центр первого круга лежал в U, а центр каждого следующего круга — внутри круга с меньшим номером. □

Для гладких (даже бесконечно гладких) функций действительного переменного такая теорема единственности не имеет места: существуют функции, равные нулю на произвольном отрезке $[a, b]$ и не обращающиеся в нуль вне него.

Следствие 2. *Пусть радиус сходимости ряда Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ функции f равен R. Тогда существует точка z такая, что $|z-a| = R$ и функцию f невозможно продолжить в точку z голоморфным образом.*

Неформально говоря, радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от точки a до ближайшей к ней особенности суммы $f(z)$ этого ряда.

Пример 1. Имеем $1/(1+z^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$; радиус сходимости равен 1. Действительно, на границе круга радиуса 1 лежит особенность функции — полюс $z = i$. В действительной области расходимость ряда при $|z| \geq 1$ необъяснима — ничего особенного с суммой при $z = \pm 1$ не происходит.

Поскольку радиус сходимости R степенного ряда вычисляется по формула Адамара $1/R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, следствие 2 позволяет оценивать скорость роста последовательности c_n, если известны особенности суммы ряда $f(z)$.

Если область голоморфности — не круг, а кольцо, то получается другое важное представление функции:

Теорема 4. *Пусть f — функция, голоморфная в кольце $A = D_R \setminus D_r$, где D_R, D_r — круги с центром a и радиусами R и r. Тогда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$. Ряд сходится абсолютно и равномерно по z на любом компактном подмножестве кольца A, а коэффициенты его вычисляются при любом $n \in \mathbb{Z}$ по формуле $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$, где ω — произвольная окружность с центром a, лежащая внутри кольца.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3, слегка уменьшим R и увеличим r, чтобы функция продолжалась на границу кольца A. Теперь $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw$. В первом интеграле разложим $1/(w-z)$ в ряд так же, как и в доказательстве теоремы 3, а во втором положим $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^n}$.

Этот ряд сходится в кольце A абсолютно, равномерно по z на компактных подмножествах и равномерно по $w \in \partial D_r$, поскольку $|w-a|\,/\,|z-a| < 1$ при $w \in \partial D_r$ и $z \in A$. Дальнейшее доказательство — как в теореме 3. $\square$

Ряд, построенный в теореме, называется рядом Лорана. Теорема верна и в случае, когда $r = 0$ и кольцо A представляет собой круг с выколотой точкой. Как и в теореме 3, возможно $R = \infty$.