ЛЕКЦИЯ 3

Предложение 1. *Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности точки a и не равна в ней тождественно нулю. Тогда существуют число $k \geq 0$ и голоморфная функция g такие, что $f(z) = (z-a)^k g(z)$ и $g(a) \neq 0$. Функция f удовлетворяет равенствам $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$, но $f^{(k)}(a) \neq 0$.*

Доказательство. Согласно теореме 3 лекции 2 функцию $f(z)$ можно разложить в степенной ряд: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}$, сходящийся равномерно и абсолютно в некоторой окрестности точки a. Пусть k — наименьшее число, для которого $c_k \neq 0$, и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}(z-a)^n$. В силу равномерной сходимости ряд для $g(z)$ можно дифференцировать почленно, поэтому g голоморфна. Согласно формуле Тейлора, $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, откуда вытекает последнее утверждение. □

Число k называется порядком нуля функции f в точке a.

Следствие 1. *Если U — открытое связное множество, $f : U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, и $f(a) = 0$, то либо a — изолированный нуль (т.е. $f(z) \neq 0$ для всех точек $z \neq a$, достаточно близких к a), либо $f(z) \equiv 0$ на всем множестве U.*

Следствие 2 (следствия 1). *Если U — открытое связное множество, и функции $f : U \to \mathbb{C}$ и $g : U \to \mathbb{C}$ совпадают на множестве $\Delta \subset U$, имеющем предельную точку $a \in U$, то они совпадают всюду.*

Теорема 1. *Пусть D — круг с центром $a \in \mathbb{C}$, а $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) *(устранимая особенность) Функция f ограничена в $D \setminus \{a\}$. Тогда она продолжается до голоморфной функции $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ — в частности, существует предел $\lim_{z\to a} f(z)$.*
(2) *(полюс) $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Тогда существует такое $k > 0$ (называемое порядком полюса), что функция $(z-a)^k f(z)$ продолжается до голоморфной функции на всем D, отличной от нуля в точке a.*
(3) *(существенная особенность) Предел $\lim_{z\to a} f(z)$ не существует (в том числе не равен ∞). Тогда для всякого открытого множества $U \subset D$, $a \in U$, множество $f(U)$ плотно в $\mathbb{C}$.*

Как мы знаем из теоремы 4 лекции 2, функцию f, голоморфную в $D \setminus \{a\}$, можно разложить в ряд Лорана по степеням $z - a$: $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n + \sum_{n<0} c_n(z-a)^n$. Очевидно, в случае устранимой особенности имеем $c_n = 0$ при всех $n < 0$, в случае полюса $c_n = 0$ при всех $n < -k$, а в случае существенной особенности имеются ненулевые коэффициенты c_n с произвольно большими по модулю отрицательными n.

Доказательство теоремы 1. Случай 1. Пусть $|f(z)| \leq C$ при всех $z \in D \setminus \{a\}$. Поскольку для всякого $n > 0$ коэффициент c_{-n} ряда Лорана выражается формулой $c_{-n} = \int_{\omega_r} (z-a)^{n-1} f(z)\, dz$, где ω_r — окружность произвольного радиуса r с центром a, имеем $|c_{-n}| \leq 2\pi r^n C$. Поскольку r можно взять сколь угодно малым, получим $c_{-n} = 0$. Теперь положим $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где c_n — коэффициенты ряда Лорана (Тейлора) функции f.

Случай 2. Пусть $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $|f(z)| > 1$. Отсюда вытекает, что функция $g(z) = 1/f(z)$ голоморфна и ограничена в $D \setminus \{a\}$. Согласно пункту 1, g продолжается до голоморфной функции во всем D; пусть $k > 0$ — порядок нуля функции g в точке a. Тогда $g(z) = (z-a)^k h(z)$, где h — голоморфная функция, и $h(a) \neq 0$. Функция $(z-a)^k f(z) = 1/h(z)$ голоморфна на всем круге D.

Случай 3. От противного: пусть для некоторого круга $U \subset D$ множество $f(U \setminus \{a\})$ не плотно в $\mathbb{C}$. Иными словами, существует $b \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $|f(z) - b| > \varepsilon$ при всех $z \in U$. Тогда функция $g(z) = 1/(f(z)-b)$ голоморфна и ограничена в $U \setminus \{a\}$ — следовательно, она продолжается до голоморфной функции на всем U. Если $k > 0$ — порядок нуля функции $g(z)$ в точке a, то $(z-a)^k f(z) = b(z-a)^k + h(z)$, где $h(a) \neq 0$. Отсюда вытекает, что $\lim_{z\to a} f(z)$ существует (возможно, бесконечен), что противоречит предположению. □

Пусть f — функция, голоморфная во внешности некоторого круга $\Omega \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что она имеет устранимую особенность/полюс/существенную особенность в бесконечности, если функция $g(z) = f(1/z)$ имеет такую особенность в нуле.

Предложение 2. *Функция $f(z)$, голоморфная на всем $\mathbb{C}$ за исключением конечного множества точек $a_1, \dots, a_n$ и имеющая в этих точках, а также в бесконечности, полюса, является рациональной. Она представима в виде $\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{k_j} \alpha_{j\ell}/(z-a_j)^\ell + \sum_{\ell=0}^{k_\infty} \alpha_{\infty\ell} z^\ell$, где $k_1, \dots, k_n, k_\infty$ — порядки полюсов в точках $a_1, \dots, a_n$ и в бесконечности.*

Доказательство. Индукция по n: пусть сначала $n=0$, так что функция f имеет полюс только в бесконечности. Разложим функцию $g(z)=f(1/z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=0$: $g(z)=\sum_{n=-k_\infty}^{\infty} c_n z^n$. Функция $h(z)=g(z)-\sum_{n=-k_\infty}^{-1} c_n z^n$ голоморфна всюду на $\mathbb{C}$ и ограничена (поскольку $g(z)\to f(0)$ при $z\to\infty$) — следовательно, она постоянна. Отсюда вытекает, что $f(z)=\sum_{n=0}^{k_\infty} c_{-n} z^n$.

Для произвольного n разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z=a_1$: $f(z)=\sum_{n=-k_1}^{\infty} c_n (z-a_1)^n$. Функция $g(z)=f(z)-\sum_{n=-k_1}^{-1} c_n (z-a_1)^n$ имеет полюса в точках $a_2,\dots,a_n$ и в бесконечности. По предположению индукции $g(z)$ рациональна и разлагается на элементарные дроби — следовательно, этим свойством обладает и $f(z)$. $\square$

Лемма. *Пусть $k\geq 2$ — целое число. Не существует голоморфной (и даже непрерывной) функции $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющей равенству $f^k(z)\equiv z$. Такая функция существует в любой односвязной области $U\subset\mathbb{C}$, не содержащей нуля.*

Доказательство. Отображение $z\mapsto z^k$ является k-листным накрытием над любым подмножеством $\mathbb{C}$, не содержащем нуля. Над единичной окружностью $\Omega=\{z \mid |z|=1\}$ это накрытие нетривиально и, следовательно, не имеет сечения. Поэтому функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющая равенству $f^k(z)\equiv z$, не существует.

Если $U\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ односвязно, то накрытие тривиально и, следовательно, имеет сечение. Это сечение f голоморфно, поскольку его производная равна $f'(z)=f(z)/(kz)$ и определена во всем U. $\square$

Теорема 2 (принцип сохранения области). *Образ открытого связного множества при непостоянном голоморфном отображении открыт.*

Доказательство. Пусть $U\subset\mathbb{C}$ — открытое связное множество и $a\in U$. Мы докажем, что точка $b=f(a)$ является внутренней для множества $f(U)$, если $f\neq const$.

Обозначим k порядок нуля в точке a функции $f(z)-b$; тогда $f(z)=b+(z-a)^k g(z)$, где $g(a)\neq 0$. Если V — достаточно малая окрестность точки a, то образ $g(V)$ лежит в односвязном открытом множестве в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Согласно лемме, найдется такая голоморфная функция h, что $g(z)=h^k(z)$ при $z\in V$. Таким образом, $f(z)=b+((z-a)h(z))^k$, и $h(a)\neq 0$. Тем самым отображение f разложено в композицию двух отображений: $z\mapsto s(z)=b+z^k$ и $z\mapsto r(z)\stackrel{\text{def}}{=}(z-a)h(z)$. Поскольку $r'(a)\neq 0$, точка $0=r(a)$ является внутренней для для множества $r(V)$ согласно теореме о неявной функции. С другой стороны, нетрудно убедиться, что отображение s переводит открытое множество в открытое — следовательно, точка $b=s(0)$ является внутренней для множества $s(r(V))=f(V)$, а тем более для множества $f(U)\supset f(V)$. $\square$

Следствие 3 (принцип максимума модуля). *Пусть $V\subset\mathbb{C}$ — компакт, и f — голоморфная функция, определенная на открытом множестве $U\supset V$. Тогда $\max_{z\in V}|f(z)|$ достигается в точке, лежащей на границе V. Иными словами, функция $|f(z)|$ не имеет в точках $z\in U$ локальных максимумов. То же самое относится и к функциям $\pm\operatorname{Re} f(z)$ и $\pm\operatorname{Im} f(z)$.*