ЛЕКЦИЯ 5

Теорема 1 (принцип аргумента). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с гладкой границей ∂U, и $f : U \to \mathbb{C}$ — мероморфная функция в ней с конечным набором нулей и полюсов $a_1, \dots, a_n$, продолжающая на Δ непрерывно и без нулей. Если a_k — нуль, то обозначим его порядок m_k; если a_k — полюс, то обозначим его порядок $-m_k$ (так что в этом случае $m_k < 0$). $\int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \sum_k m_k = 2\pi i h$, где h — степень отображения $f(z)/|f(z)| : \Delta \to S^1$.*

Следствие. *Если f — мероморфная функция, то ее логарифмическая производная f'/f имеет полюсы в нулях и полюсах f. При этом если a — нуль порядка m, то $\mathrm{Res}_{z=a} f'(z)/f(z)\,dz = m$, а если a — полюс порядка m, то $\mathrm{Res}_{z=a} f'(z)/f(z)\,dz = -m$.*

Доказательство. Для доказательства первого равенства, достаточно рассмотреть случай, когда в области U лежит ровно один нуль или полюс функции f — иными словами, достаточно доказать следствие. Пусть a — нуль порядка m. Тогда $f(z) = (z-a)^m g(z)$, где g — голоморфная функция и $g(a) \neq 0$. Тогда $f'(z)/f(z) = m/(z-a) + g'(z)/g(z)$, откуда $\int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i m$ (второе слагаемое голоморфно и поэтому интеграл от него равен нулю). Рассуждение в случае полюса аналогично.

Для доказательства второго равенства параметризуем границу ∂U, т.е. рассмотрим гладкое взаимно однозначное отображение $\gamma : S^1 \to \partial U$ (если ∂U несвязна, то проведем это рассуждение по отдельности для каждой ее компоненты). Обозначим $\nu = dz/z$; тогда $\int_{\partial U} f'(z)/f(z)\,dz = \int_{\partial U} f^*\nu = \int_{S^1} (f \circ \gamma)^*\nu$. Отображение $f \circ \gamma : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ параметризует кривую $f(\partial U)$; эта кривая гомотопна (в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) единичной окружности, пройденной h раз. Форма ν голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и потому замкнута — следовательно, форма $(f \circ \gamma)^*\nu$ на S^1 также замкнута. Отсюда вытекает, что $\int_{S^1} (f \circ \gamma)^*\nu = h \int_{S^1} \nu = 2\pi i h$. □

Из теоремы 1 вытекает такое утверждение:

Предложение 1. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — ограниченное открытое множество, и $f_1, \dots, f_n, \dots : U \to \mathbb{C}$ — последовательность голоморфных функций, сходящаяся к голоморфной функции $f : U \to \mathbb{C}$ равномерно на любом компакте $K \subset U$. Предположим, что все функции f_i инъективны: $f_i(z) \neq f_i(w)$ при $z \neq w$. Тогда функция f либо постоянна, либо также инъективна.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из интегральной формулы Коши вытекает равномерная на компактах $K \subset U$ сходимость $f_n' \to f'$ (а также для всех высших производных, но она нам не понадобится).

Пусть существуют различные точки $z, w \in U$ такие, что $f(z) = f(w) = a$. Если $f \neq const.$, то множество $f^{-1}(a) \subset U$ не имеет в U предельных точек, откуда вытекает, что существует ограниченная область $\Delta \subset U$, содержащая z и w и такая, что $f(x) \neq a$ при $x \in \partial\Delta$. Граница $\partial\Delta$ компактна, откуда вытекает, что $g_n'/g_n \to g'/g$ равномерно на $\partial\Delta$, где $g_n(z) = f_n(z) - a$ и $g(z) = f(z) - a$. Функции g_n инъективны, так что из принципа аргумента вытекает, что $\int_{\partial\Delta} g_n'(z)/g_n(z)\,dz$ равен $2\pi i$ или 0 для всех n. Функция $g(z)$ имеет в области Δ по крайней мере два нуля и не имеет полюсов — следовательно, $\int_{\partial\Delta} g'(z)/g(z)\,dz = 2\pi i h$, где $h \geq 2$ — противоречие. □