ЛЕКЦИЯ 6

Основой теории одномерных комплексных многообразий является

Теорема 1 (Риман). *Открытое собственное односвязное подмножество $\mathbb{C}$ биголоморфно эквивалентно единичному кругу.*

Для доказательства нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Открытое собственное односвязное подмножество $\mathbb{C}$ биголоморфно эквивалентно некоторому подмножеству единичного круга.*

Доказательство. Обозначим подмножество U. Поскольку оно собственное, можно считать, что $0 \notin U$. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — отображение возведения в квадрат. Поскольку U односвязно и не содержит нуля, в U существует однозначная ветвь квадратного корня ψ — иными словами, множество $f^{-1}(U)$ состоит из двух компонент связности U_1, U_2, причем $\psi : U \to U_1$ — взаимно однозначное отображение. Пусть $\Delta \subset U_2$ — круг радиуса r с центром a. Функция $g(z) = r/(z-a)$ голоморфна и инъективна в U_1 и принимает значения в единичном круге D — следовательно, U биголоморфно эквивалентно множеству $g(\psi(U)) \subset D$. □

В дальнейшем мы считаем просто, что $U \subset D$, где D — единичный круг.

В множестве $\mathrm{Map}(X_1, X_2)$ непрерывных отображений двух метрических пространств введем топологию, сходимость по отношению к которой означает равномерную сходимость на всяком компактном подмножестве $K \subset X_1$. (Базу открытых множеств в такой топологии составляют множества $\{f \mid \forall x \in K\ \varrho(f(x), a) < \varepsilon_K\}$, где ϱ — расстояние в X_2, $a \in X_2$ — произвольная точка, и $\varepsilon_K > 0$ — произвольный набор констант для всех компактов $K \subset X_1$.) Эту топологию называют компактно-открытой или топологией равномерной сходимости на компактах.

Компактные множества в компактно-открытой топологии описываются следующей классической теоремой:

Теорема (Арцела–Асколи). *Пусть метрические пространства X_1, X_2 компактны. Множество $Q \subset \mathrm{Map}(X_1, X_2)$ компактно тогда и только тогда, когда оно*

1. *Замкнуто.*
2. *Равномерно ограничено — существует такая константа C и точка $a \in X_2$, что $\varrho_2(f(x), a) \le C$ для всех $x \in X_1$, $f \in Q$.*
3. *Равностепенно непрерывно — для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X_1$ таких, что $\varrho_1(x, y) < \delta$ и для любой функции $f \in Q$ выполнено неравенство $\varrho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Следствие 1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Тогда множество гладких отображений $f : K \to \mathbb{R}^m$, для которых $|f(x)| \le C$ и $\|f'(x)\| \le M$ для всех $x \in K$, компактно в компактно-открытой топологии.*

(Здесь под $\|f'(x)\|$ подразумевается норма линейного оператора. Из неравенства $\|f'(x)\| \le M$ вытекает, что в критерии равностепенной непрерывности можно взять $\delta = \varepsilon/M$.)

Лемма 2. *Множество Q голоморфных отображений $f : U \to D$ компактно в компактно-открытой топологии.*

Доказательство. Выберем последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset U$ такую, что всякий K_i лежит во внутренности K_{i+1} и $\bigcup_i K_i = U$. Для этого можно, например, положить $K_i = \{x \in U \mid \Omega_{1/i}(x) \subset U\}$, где $\Omega_{1/i}(x)$ — открытый круг радиуса $1/i$ с центром x (напомним, что мы считаем, что $U \subset D$, то есть ограничено).

Множество $Q_i = \{f|_{K_i} \mid f \in Q\}$ замкнуто и равномерно ограничено в компактно-открытой топологии пространства $\mathrm{Map}(K_i, D)$. Покажем, что Q_i равностепенно непрерывно, то есть компактно. Для этого покроем K_i конечным набором кругов, лежащих целиком в U — достаточно доказать равностепенную непрерывность в каждом таком круге Δ. Для доказательства этого заключим Δ в несколько больший круг $\Delta' \subset U$ с тем же центром; пусть r и R — радиусы Δ и Δ' соответственно. Тогда интегральная формула Коши дает $|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \Delta'} \frac{|f(w)|}{|z-w|^2}\, dz \le \frac{CR}{(R-r)^2}$ для всякой точки $z \in \Delta$ и произвольной функции $f \in Q$. Верхняя граница не зависит от f, поэтому равностепенная непрерывность доказана в силу следствия 1.

Пусть теперь $f_1, \dots, f_n, \dots$ — произвольная последовательность функций из Q. Их ограничения на компакт K_1 принадлежат Q_1 — следовательно, можно выбрать подпоследовательность $f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots$, сходящуюся на K_1. Ограничения функций $f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots$ на K_2 принадлежат Q_2 — следовательно, из $f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots$

можно выбрать подпоследовательность $f_{21}, \ldots, f_{2n}, \ldots$, сходящуюся на K_2. Продолжая этот процесс, получим счетный набор вложенных подпоследовательностей f_{sn}, причем $f_{s1}, \ldots, f_{sn}, \ldots$ сходится на $K_1, \ldots, K_s$. Последовательность $f_{11}, f_{22}, \ldots$ является подпоследовательностью исходной последовательности и сходится равномерно на каждом K_i — а следовательно, и на всяком компакте $K \subset U$. $\square$

Следствие 2 (леммы 2 и предложения 1 лекции 5). *Множество голоморфных инъективных или постоянных отображений $f : U \to D$ компактно в компактно-открытой топологии.*

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем точку $a \in U$. В силу следствия 2 множество Q голоморфных инъективных отображений $f : U \to D$ компактно. В силу интегральной формулы Коши отображение, $Q \to \mathbb{R}$, сопоставляющее функции f число $|f'(a)|$, непрерывно. Поэтому существует отображение f, для которого число $|f'(a)|$ принимает наибольшее значение.

Покажем, что $f(a) = 0$. Если $b = f(a) \neq 0$, то рассмотрим отображение $g_b : D \to D$, действующее по правилу $g_b(z) = (z - b)/(1 - \bar{b}z)$. Нетрудно проверить, что $g_b(b) = 0$ и $|g_b'(b)| = 1/(1 - |b|^2) > 1$. Отображение $g_b \circ f$ принадлежит Q, но $|(g_b \circ f)'(a)| = |f'(a)|/(1 - |b|^2) > |f'(a)|$, вопреки выбору f.

Теперь покажем, что $f(U) = D$. Пусть $b \in D \setminus f(U)$; обозначим $f_1 = g_b \circ f$, тогда $0 \notin f_1(U)$. Множество $f_1(U) \subset D$ односвязно, поэтому в нем существует однозначная ветвь квадратного корня $\varphi : f_1(U) \to D$. Отображение $f_2 = g_{\varphi(-b)} \circ \varphi \circ f_1 = g^{-1}_{\varphi(-b)} \circ \varphi \circ g_b \circ f$ принадлежит Q; в то же время $|f_2'(a)| = |(g_{\varphi(-b)})'(\varphi(-b))| \cdot |\varphi'(-b)| \cdot |g_b'(0)| \cdot |f'(a)| = \frac{1}{1-|b|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{|b|}} \cdot (1 - |b^2|)\,|f'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}\,|f'(a)| > |f'(a)|$ — вопреки выбору f. $\square$

Следствие 3. *Любые два односвязных открытых подмножества $\mathbb{R}^2$ гомеоморфны друг другу.*

Заметим, что следствие 3 — чисто топологическое, в его формулировке комплексная структура отсутствует !

Предложение 1. *Пусть Y — комплексное многообразие, и $p : X \to Y$ — накрытие. Тогда на X существует и единственна структура комплексного многообразия той же размерности, относительно которой отображение p голоморфно. Если $p_1 : X_1 \to Y$ и $p_2 : X_2 \to Y$ — два голоморфных накрытия, и $f : X_1 \to X_2$ — отображение, удовлетворяюшее равенству $p_2 \circ f = p_1$, то f голоморфно.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ и $U \ni a$ — окрестность настолько малая, что ограничение $p|_U$ является гомеоморфизмом на множество $p(U) \subset Y$, лежащее в некоторой координатной окрестности с координатами $z : p(U) \to \mathbb{C}^n$. Тогда композиция $z \circ p$ превращает U в координатную окрестность. Нетрудно видеть, что другой возможности и нет.

Для доказательства второго утверждения возьмем точку $a \in X_1$ и, опять-таки, ее малую окрестность U. Тогда существует отображение $s : p_1(U) \to X_2$, обратное p_2 и такое, что $f = s \circ p_1$ на U. Отображение s обратно голоморфному и, следовательно, голоморфно — поэтому голоморфно и f. $\square$

Следствие 4. *Если два голоморфных накрытия комплексного многообразия эквивалентны (как накрытия), то накрывающие пространства биголоморфно эквивалентны.*

Обобщением теоремы Римана является

Теорема 2 (Кебе). *Всякое односвязное одномерное комплексное многообразие биголоморфно эквивалентно либо D, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{C}P^1$.*

Мы не будем доказывать эту теорему. Из нее и следствия 4 вытекает, что универсальное накрытие всякого одномерного комплексного многообразия есть либо D, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{C}P^1$.

Предложение 2. *Если многообразие X накрывается $\mathbb{C}P^1$, то $X = \mathbb{C}P^1$ (и накрытие тривиально).*

Первое доказательство (топологическое). Пусть $p : \mathbb{C}P^1 \to X$ — накрытие степени k. Пространство X является гладким ориентированным компактным многообразием размерности (вещественной) 2, то есть сферой с g ручками. Тогда $\chi(X) = 2 - 2g$, $\chi(\mathbb{C}P^1) = 2$, и $2 = k(2 - 2g)$, откуда вытекает, что $g = 0$ и накрытие тривиально. Следовательно, X биголоморфно эквивалентно $\mathbb{C}P^1$. $\square$

Второе доказательство (комплексно-аналитическое). Группа $\pi_1(X)$ действует на накрывающем пространстве $\mathbb{C}P^1$ голоморфными автоморфизмами. При этом автоморфизм, соответствующий элементу $w \in \pi_1(X)$, либо тождественный (это бывает только при $w = 1$), либо не имеет неподвижных точек. Нетрудно, однако, заметить, что всякий голоморфный автоморфизм $\mathbb{C}P^1$ — то есть дробно-линейное преобразование — имеет неподвижные точки. Тем самым $\pi_1(X) = 1$ и накрытие тривиально. $\square$