ЛЕКЦИЯ 7

Пусть $f : X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение двух комплексных кривых, и $x \in X$ — точка, для которой $f'(x) = 0$. Назовем *индексом ветвления* $e(x)$ в точке x наименьшее целое k такое, что $f^{(k)}(x) \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть кривые X и Y компактны и связны, причем X имеет род g_1, а Y — род g_2. Тогда*

(1) $f(X) = Y$.
(2) *Множество $f^{-1}(y)$ конечно для всякого $y \in Y$.*
(3) *Множество $S = \{x \in X \mid f'(x) = 0\}$ конечно. Ограничение $f : X \setminus f^{-1}(f(S)) \to Y \setminus f(S)$ является накрытием с конечным количеством листов (обозначаемым n).*
(4) *Имеет место формула Римана–Гурвица: $2g_1 - 2 = n(2g_2 - 2) + \sum_{x\in S}(e(x) - 1)$.*

Доказательство. Множество $f(X) \subset Y$ открыто по принципу сохранения области и компактно, поскольку X — компакт. Множество Y связно, поэтому $f(X) = Y$.

Если множество $f^{-1}(y) \subset X$ бесконечно, то оно имеет предельную точку x_0. Согласно принципу аналитического продолжения, $f(x) \equiv y$ в некоторой окрестности точки x_0. Поскольку X связна, $f = const.$ вопреки условию.

Конечность множества S доказывается так же. Согласно теореме о неявной функции f является локальным гомеоморфизмом $U_x \to V_x \subset Y$ в некоторой окрестности U_x произвольной точки $x \in f^{-1}(y)$; при этом $V_x \subset Y$ — окрестность точки y. Тогда $V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{x\in f^{-1}(y)} V_x$ — также окрестность точки y (пересечение конечного числа открытых множеств), откуда $f^{-1}(V)$ гомеоморфно произведению V на дискретное множество, и локальная тривиальность доказана.

Для доказательства последнего равенства припишем индекс ветвления $e(x) = 1$ точкам $x \in f^{-1}(f(S))$, в которых производная не обращается в нуль, и заменим суммирование по $x \in S$ суммированием по $x \in f^{-1}(f(S))$ — понятно, что это ничего не изменит. Пусть теперь $f(S) = \{y_1, \dots, y_N\}$, и $f^{-1}(y_k) = \{x_{i1}, \dots, x_{ik_i}\}$. Если $z \notin f(S)$ и лежит близко к y_i, то $f^{-1}(z)$ состоит из $e(x_{i1})$ точек, близких к x_{i1}, $e(x_{i1})$ точек, близких к x_{i2}, и т.д. — всего n точек, откуда $\sum_{j=1}^{k_i} e(x_{ij}) = n$. Вырежем из Y объединение малых кругов Ω_i, $i = 1, \dots, N$, с центрами в точках y_i. Согласно пункту 3, отображение $f : X \setminus f^{-1}(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i) \to Y \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ — n-листное накрытие, откуда $\chi(X \setminus f^{-1}(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i)) = n\chi(Y \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i)$. Множество $f^{-1}(\Omega_i)$ гомеоморфно объединению k_i кругов, откуда $\chi(X \setminus f^{-1}(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i)) = 2 - 2g_1 - \sum_{i=1}^N k_i$. С другой стороны, $n\chi(Y \setminus \bigcup_{i=1}^N \Omega_i) = n(2 - 2g_2) - nN = n(2 - 2g_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{k_i} e(x_{ij})$, откуда и вытекает последняя формула. □

Число n называется степенью отображения f, а множество $f(S)$ — множеством критических значений.

Теорема 2. *Пусть Y — комплексная кривая, $T \subset Y$ — множество, не имеющее предельных точек, и $f : X \to Y \setminus T$ — конечнолистное голоморфное накрытие. Тогда существует комплексная кривая $\tilde{X}$ и собственное голоморфное отображение $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ такое, что $X \subset \tilde{X}$, множество $\tilde{X} \setminus X$ не имеет предельных точек, и $\tilde{f}\Big|_X = f$.*

Доказательство. Пусть $y \in T$, и $U \subset Y$ — единичный круг с центром в y (в каких-либо координатах; считаем, что координаты выбраны так, что $U \cap T = \{y\}$). Положим $f^{-1}(U \setminus \{y\}) = \bigcup_{i=1}^N V_i$ — объединение компонент связности. Отображение $f : V_k \to U \setminus \{y\}$ — конечнолистное накрытие, соответствующее некоторой подгруппе $G_k \subset \pi_1(U \setminus \{y\}) = \mathbb{Z}$ индекса n_k. Такая подгруппа только одна: $G_k = n_k\mathbb{Z}$, откуда вытекает (в силу предложения 1 и следствия 4 лекции 6), что существует биголоморфная эквивалентность $\mu_k : V_k \to D \setminus \{0\}$ (где D — единичный круг), такая что $\mu_k^{-1} \circ f : D \setminus \{0\} \to U \setminus \{y\}$ — возведение в степень n_k.

Присоединим теперь к кривой X по одной точке p_k для каждого V_k (и для каждого $y \in T$); объединение и есть $\tilde{X}$. Структура одномерного комплексного многообразия в $\tilde{X}$ задается так: картой в точке p_k служит $V_k \cup \{p_k\}$, а координатным отображением — $\mu_k : V_k \cup \{p_k\} \to D$ — очевидно, функции перехода со старыми картами гладкие. Положим по определению $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in X$ и $\tilde{f}(p_k) = y$. Тогда в окрестности точки p_k отображение $\tilde{f}$ — возведение в степень n_k, и, следовательно, голоморфно; голоморфность в остальных точках предполагается по условию теоремы. □

Пусть X — комплексная кривая. Назовем *ростком голоморфной функции* в точке $a \in X$ класс эквивалентности пар (U, f), где $U \subset X$ — открытое подмножество, $a \in U$, а $f : U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Две пары (U_1, f_1) и (U_2, f_2) эквивалентны, если существует открытое множество $V \subset U_1 \cap U_2$, $a \in V$, на котором функции f_1 и f_2 совпадают. На самом деле из теоремы об аналитическом продолжении вытекает, что f_1 и f_2 совпадают на всей компоненте связности множества $U_1 \cap U_2$, содержащей точку a. По теореме о разложении в ряд росток голоморфной функции в точке a это ряд Тейлора в этой точке с ненулевым радиусом сходимости.

Два ростка (f_1, a_1) и (f_2, a_2) *совместны*, если у них имеются такие представители (U_1, f_1) и (U_2, f_2), что $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ и $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$. Два ростка (f_1, a_1) и (f_2, a_2) *продолжают* друг друга, если существует последовательность ростков (g_i, b_i), $i = 1, \ldots, N$, в которой $(g_1, b_1) = (f_1, a_1)$, $(g_N, b_N) = (f_2, a_2)$, и ростки (g_k, a_k) и (g_{k+1}, a_{k+1}) совместны для любого k. Легко проверить, что это отношение эквивалентности.

На множестве $\mathcal{A}(f, a)$ всех ростков, продолжающих (f, a), можно ввести структуру комплексной кривой. А именно, рассмотрим открытое множество $U \subset X$, в котором определена какая-либо система координат, и голоморфную функцию $\varphi : U \to \mathbb{C}$. Обозначим $\Omega(U, \varphi)$ множество ростков (φ, a) в точках $a \in U$. Всевозможные множества $\Omega(U, \varphi)$ объявим координатными окрестностями в $\mathcal{A}(f, a)$, а координатное отображение $r_{U,\varphi} : \Omega(U, \varphi) \to \mathbb{C}$ сопоставляет ростку (φ, a) в точке $a \in U$ координаты точки a. Нетрудно видеть, что отображения перехода между введенными координатами голоморфны — они такие же, как на исходном многообразии X. Для доказательства того, что действительно получилось комплексное многообразие, нужно проверить топологические условия — отделимость и наличие счетной базы.

Пусть (f_1, a_1) и (f_2, a_2) — два различных ростка в точках $a_1, a_2 \in X$. Если $a_1 \neq a_2$, то отделимость очевидна: возьмем $U_1, U_2 \subset X$ такие, что $a_1 \in U_1$, $a_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Тогда $(f_1, a_1) \in \Omega(U_1, f_1)$, $(f_2, a_2) \in \Omega(U_2, f_2)$ и $\Omega(U_1, f_1) \cap \Omega(U_2, f_2) = \varnothing$. Если же $a_1 = a_2$, то $\Omega(U, f_1) \cap \Omega(U, f_2) = \varnothing$ для любой окрестности U точки $a_1 = a_2$. Действительно, если $(g, b) \in\in \Omega(U_1, f_1) \cap \Omega(U_2, f_2)$, то функции f_1 и f_2 совпадают с функцией g и друг с другом в некоторой окрестности точки $b \in U$ — следовательно, по принципу аналитического продолжения, $f_1 = f_2$ во всем U, то есть ростки (f_1, a_1) и (f_2, a_2) совпадают.

Имеется естественное отображение $\pi : \mathcal{A}(U, f) \to X$, сопоставляющее ростку (g, b) в точке $b \in X$ точку b. Очевидно, это отображение является локальным гомеоморфизмом и голоморфно (мы еще не доказали, что $\mathcal{A}(f, a)$ — комплексное многообразие, но понятие голоморфности имеет смысл и без счетной базы).

Предложение 1. *Пусть $\gamma : [0, 1] \to X$ — кривая, лежащая целиком в множестве $\pi(\mathcal{A}(U, f))$. Тогда для всякого ростка $(V, g) \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ существует и единствен подъем $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathcal{A}(U, f)$ кривой γ, для которого $\tilde{\gamma}(0) = (V, g)$. Росток $\tilde{\gamma}(1)$ не меняется при гомотопии кривой γ с фиксированными концами.*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы о накрывающей гомотопии для накрытий (хотя отображение π, вообще говоря, не накрытие, а только локальный гомеоморфизм).

Следствие. *Прообраз $\pi^{-1}(a)$ конечен или счетен для всех $a \in X$. Топологическое пространство $\mathcal{A}(U, f)$ обладает счетной базой и, следовательно, является комплексной кривой.*

Действительно, множество классов гомотопии петель в точке a на открытом подмножестве $\pi(\mathcal{A}(U, f)) \subset X$ конечно или счетно.

Очевидно, на комплексной кривой $\mathcal{A}(f, a)$ определена голоморфная функция $\tilde{f}$, равная $g(b)$ в точке, соответствующей ростку (g, b) (продолжающему (f, a)).

Тройку $(\mathcal{A}(f, a), \pi, \tilde{f})$ называют аналитическим продолжением ростка (f, a) на комплексной кривой X.